

Folheações de codimensão um em característica positiva e aplicações

Wodson Mendson

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

11 de abril de 2022

Folheações de codimensão um em característica positiva e aplicações

Wodson Mendson

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Tese de doutorado submitida ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada
como requisito parcial para obtenção do título de
Doutor em Matemática

Resumo

Nesse trabalho, investigamos propriedades de folheações de codimensão um que estão definidas sobre um corpo de característica positiva. O conteúdo está dividido essencialmente em quatro partes. Na primeira parte, introduzimos as folheações de codimensão um não p -fechadas e estudamos algumas de suas principais propriedades. Definimos o p -divisor e a p -distribuição associados. Na segunda parte, exibimos as componentes irredutíveis do espaço das folheações p -fechadas de dimensão um e grau um em $\mathbb{P}_k^n (n \geq 2)$ e mostramos que o número de tais componentes é da ordem p^n , onde p é a característica do corpo base. Na terceira parte, apresentamos um teorema de estrutura para o p -divisor de folheações em \mathbb{P}_k^2 e nas superfícies de Hirzebruch $\Sigma_d (d \geq 0)$. Na última parte, mostramos como usar o material desenvolvido em característica positiva para construir novas componentes irredutíveis do espaço de folheações holomorfas de codimensão um e grau $d \geq 3$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$.

Orientador: Jorge Vitório Pereira

Agradecimentos

- Gostaria de agradecer ao Jorge Vitório Pereira por estar disposto a me orientar desde minha chegada ao IMPA e por propor um problema de tese interessante. Agradeço também pelo profissionalismo e pelas várias conversas matemáticas que tivemos ao longo do doutorado que foram fundamentais para minha formação profissional e conclusão de tese. Obrigado Jorge!
- Meu interesse em matemática pura se deu essencialmente pelas conversas matemáticas que tive com o Israel Vainsencher no período de Iniciação Científica (2014-2016) na UFMG (tempos de fultinho e curvas elípticas). Obrigado Israel pela paciência nos momentos iniciais, por ter contribuído em minha formação e por me motivar a procurar novos horizontes para realização do doutorado.
- Agradeço ao André Gimenez Bueno pelos belos cursos de álgebra, na graduação e no mestrado, que incentivaram ainda mais o meu interesse em matemática pura.
- Agradeço aos membros da banca: Israel Vainsencher, Carolina Araujo, Fernando Cukierman, Maycol Falla e Edileno de Almeida Santos por terem aceito o convite. Em particular, ao Israel, Fernando, Maycol e Carolina pelas sugestões e observações que ajudaram a melhorar a escritura do texto.
- Agradeço aos meus familiares pelo suporte, em particular, no período pandêmico de 2020-2021.
- Agradeço ao CNPq(2018-2019) e a FAPERJ(2020-2021) pelo apoio financeiro durante a realização do doutorado.

“We live on an island surrounded by a sea of ignorance. As our island of knowledge grows, so does the shore of our ignorance.”

John Archibald Wheeler

Sumário

1	Introdução	11
1.1	Descrição dos capítulos	13
1.2	Notações	16
2	Preliminares	19
2.1	Distribuições e folheações	19
2.1.1	Distribuições de codimensão um em \mathbb{P}_k^n	21
2.2	Superfícies de Hirzebruch	22
2.2.1	Transformações elementares	23
2.2.2	Uma descrição em termos de coordenadas	23
2.2.3	Equações globais para folheações em Σ_d	24
3	Folheações em característica positiva	27
3.1	Introdução	27
3.2	Folheações p -fechadas	27
3.2.1	Morfismo de Frobenius e folheações p -fechadas	28
3.2.2	Operador de Cartier	31
3.3	Morfismo p -curvatura e p -divisor	33
3.3.1	Folheações não p -fechadas, p -divisor e p -distribuição	33
3.3.2	A p -folheação e sua relação com operador de Cartier	37
3.4	Componentes irredutíveis de $\text{Fol}_{p-2}(\mathbb{P}_k^n)$	39
4	Folheações p-fechadas de dimensão um em \mathbb{P}_k^n	42
4.1	Introdução	42
4.2	Folheações de dimensão um e grau $d \geq 0$ em \mathbb{P}_k^n	44
4.3	Matrizes p -fechadas	47

4.4	Matrizes com traço nulo e $\text{Fol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)$	48
4.5	Componentes irredutíveis de $\text{Tr}_0(0; n+1)$	50
4.5.1	Componentes irredutíveis de $\text{Fol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$	52
5	Folheações em superfícies e o p-divisor em \mathbb{P}_k^2 e Σ_d	55
5.1	Introdução	55
5.2	Folheações em superfícies	56
5.2.1	p -divisor para folheações em superfícies	57
5.2.2	Folheações em \mathbb{P}_k^2	59
5.3	p -divisor em \mathbb{P}_k^2	60
5.4	p -divisor em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$	64
5.4.1	Caso A	66
5.4.2	Caso B	69
5.5	Folheações e p -divisor em Σ_d ($d \geq 0$)	72
5.5.1	p -divisor em Σ_d	73
5.6	Alguns problemas	78
6	Novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$ via característica positiva	81
6.1	Introdução	81
6.2	Grau do p -divisor em vizinhanças	83
6.2.1	Um exemplo	87
6.3	Demonstração do Teorema D	88
6.4	Redução módulo p e demonstração do Teorema E	91

Capítulo 1

Introdução

Uma folheação holomorfa em uma variedade algébrica complexa X consiste em uma decomposição de X em subvariedades de dimensão menor satisfazendo certas condições de compatibilidade. O estudo de tais objetos remonta ao século XIX onde matemáticos como H. Poincaré e G. Darboux iniciaram o estudo de equações diferenciais polinomiais no plano complexo levantando questões sobre a existência de muitas soluções algébricas e cotas para o grau de tais soluções, caso existam. Do ponto de vista formal, uma folheação holomorfa em uma variedade algébrica complexa X é definida como um subfeixe coerente saturado do feixe tangente de X , $T_{\mathcal{F}} \subset T_X$, que é fechado por colchete de Lie. Uma folha, ou solução, de tal folheação consiste em uma subvariedade analítica lisa $L \subset X$ com feixe tangente, T_L , coincidindo com $T_{\mathcal{F}}|_L$. Quando o feixe definindo a folheação tem posto $r = \dim X - 1$ dizemos que a folheação é de codimensão um e, nesse caso, a definição equivale a dar uma cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ por abertos de X e uma coleção de 1-formas $\{\omega_i\}_{i \in I}$ com $\omega_i \in \Omega_X^1(U_i)$ tais que: $\text{codim sing}(\omega_i) \geq 2$, $\omega_i \wedge d\omega_i = 0$ para todo $i \in I$ e tal que em $U_i \cap U_j$, se não vazio, vale $\omega_i = g_{ij} \cdot \omega_j$ para alguma função regular $g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$. Observe que a definição em termos de subfeixes de T_X é puramente algébrica de modo que podemos definir a noção de folheação em uma variedade algébrica não singular definida sobre um corpo algebricamente fechado k .

Seja k um corpo algebricamente fechado. As folheações de codimensão um no espaço projetivo \mathbb{P}_k^n ($n \geq 2$) admitem uma formulação bem explícita. Dada uma tal folheação podemos associar um invariante chamado o grau que admite a seguinte interpretação geométrica: é o número de tangências da folheação com uma reta genérica em \mathbb{P}_k^n . Nesse sentido, uma folheação de codimensão um e grau $d \geq 0$ em \mathbb{P}_k^n é determinada por uma seção global não nula $\omega \in H^0(\mathbb{P}_k^n, \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(d+2))$ com conjunto singular de codimensão maior que um e satisfazendo a condição de integrabilidade: $\omega \wedge d\omega = 0$. Usando a sequência exata de Euler para espaços projetivos percebe-se que tal folheação é determinada por uma 1-forma homogênea em \mathbb{A}_k^{n+1}

$$\sigma = A_0 dx_0 + \cdots + A_n dx_n$$

onde A_0, \dots, A_n são polinômios homogêneos de grau $d+1$ tal que $\text{sing}(\sigma) = \mathcal{Z}(A_0, \dots, A_n)$ tem codimensão maior que um e com σ satisfazendo as seguintes condições

$$i_R \sigma = \sum_i x_i A_i = 0 \quad , \quad \sigma \wedge d\sigma = 0$$

onde $R = \sum_i x_i \partial_{x_i}$ é o campo radial. A condição de integrabilidade é equivalente a uma série de equações:

$$A_i \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_l} \right) + A_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_i} \right) + A_l \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) = 0$$

para $0 \leq i < j < l \leq n$. Podemos considerar o espaço das folheações de codimensão um e grau d em \mathbb{P}_k^n

$$\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^n) = \{[\sigma] \in \mathbb{P}(\mathbb{H}^0(\mathbb{P}_k^n, \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(d+2))) \mid \sigma \wedge d\sigma = 0 \text{ e } \text{codim sing}(\sigma) \geq 2\}$$

que é uma subvariedade quase projetiva de $\mathbb{P}(\mathbb{H}^0(\mathbb{P}_k^n, \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(d+2)))$. Um problema natural consiste em descrever a geometria de tal espaço, em particular suas componentes irredutíveis. Note que quando $n = 2$ a condição de integrabilidade é automática de modo que o espaço de folheações de codimensão um e grau d em \mathbb{P}_k^2 é um aberto em $\mathbb{P}(\mathbb{H}^0(\mathbb{P}_k^2, \Omega_{\mathbb{P}_k^2}^1(d+2)))$.

O estudo das componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^n)$ quando $k = \mathbb{C}$ e $n \geq 3$ é fonte de muitos trabalhos e uma área ativa. Jouanolou em [27] resolve o problema para $d = 0$ e $d = 1$. No primeiro caso, tal espaço é irredutível e se identifica com a grassmanniana de retas em \mathbb{P}_k^n . Quando $d = 1$ o espaço de folheações de codimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n possui precisamente duas componentes irredutíveis (ver [27], [38, Proposição 1.2.3, Teorema 6.]). O caso $d = 2$ foi completamente resolvido em [8] por Cerveau e Lins Neto, onde eles mostraram que o espaço de folheações de codimensão um e grau dois em \mathbb{P}_k^n possui precisamente seis componentes irredutíveis e descrevem tais componentes. Em grau $d \geq 3$ o problema de determinar componentes irredutíveis do espaço de folheações não está completamente entendido, sendo [14] um avanço significativo em grau $d = 3$. Tal trabalho, demonstra que o espaço de folheações de codimensão um em \mathbb{P}_k^n admite precisamente dezoito componentes irredutíveis cujo elemento genérico admite um número finito de soluções algébricas. Para mais resultados nessa direção, sugerimos o leitor consultar [38],[6],[9],[8], [12] e [14].

Uma classe importante de folheações holomorfas de codimensão um no espaço projetivo $\mathbb{P}_k^n (n \geq 2)$ consiste na classe das folheações que admitem uma integral primeira racional. Dada uma folheação holomorfa \mathcal{F} de codimensão um em \mathbb{P}_k^n uma integral primeira racional para \mathcal{F} consiste em um mapa racional não constante $\Phi : \mathbb{P}_k^n \dashrightarrow \mathbb{P}_k^1$ tal que \mathcal{F} é a folheação definida pelas fibras de Φ . A existência de uma tal integral primeira racional diz muito sobre a natureza das folhas da folheação \mathcal{F} . Implica, por exemplo, que todas as folhas de \mathcal{F} são algébricas. Um Teorema de Jouanolou garante a recíproca: se \mathcal{F} admite uma infinidade de folhas algébricas então \mathcal{F} admite uma integral primeira racional.

Em dimensão dois a existência de integrais primeiras racionais é algo de natureza rara. Na monografia [27] Jouanolou demonstra que uma folheação muito genérica de grau pelo menos dois em \mathbb{P}_k^2 não admite nenhuma solução algébrica. Assim, muitas folheações em \mathbb{P}_k^2 não admitem nenhuma folha algébrica e em particular não admitem integral primeira racional. Em contrapartida J.V.Pereira, em [39], demonstra o fato interessante que o análogo de tal resultado sobre um corpo de característica positiva é completamente falso. Segue dos resultados estabelecidos em [39] que se k é um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ então qualquer folheação \mathcal{F} em \mathbb{P}_k^2 tendo grau menor que a característica p admite uma solução algébrica. Tal resultado pode ser reformulado em termos de derivações. Se $R = k[x, y]$ é o anel de polinômios a coeficientes em k e $v = a(x, y)\partial_x + b(x, y)\partial_y \in \text{Der}_k(R)$ é uma derivação tal que $\deg(v) = \max\{\deg(a), \deg(b)\} < p$ então existe um polinômio $f \in k[x, y]$ que não é p -potência e tal que $v(f)$ está no ideal gerado por f .

Em característica positiva existem duas classes de folheações. As folheações p -fechadas e as que não são p -fechadas. A definição se passa pela seguinte observação elementar: se k é um corpo de característica positiva p e v é uma derivação de um k -domínio R então o p -iterado de v , v^p , é uma derivação. Dessa maneira, definimos uma folheação \mathcal{F} em uma variedade algébrica X , definida sobre k , como sendo p -fechada se seu feixe tangente $T_{\mathcal{F}}$ é estável por p -potência, isto é, para cada seção local $v \in T_{\mathcal{F}}$ temos que $v^p \in T_{\mathcal{F}}$. A classe das folheações p -fechadas é o análogo em característica $p > 0$ da classe de folheações que admitem uma integral primeira racional na categoria complexa (veja [37, 1.9 Proposition]). Vale, em particular, um resultado análogo ao Teorema de Jouanolou: uma folheação de codimensão um sobre um corpo de característica $p > 0$ é p -fechada se e somente se admite uma infinidade de hipersuperfícies invariantes (veja [5, Théorème 1]).

Dada uma folheação holomorfa de codimensão um em uma variedade projetiva complexa X podemos aplicar o processo de redução módulo p e obter uma folheação em uma variedade definida sobre um corpo de característica positiva. Informações sobre a folheação módulo p podem implicar em informações bem interessantes sobre a folheação original. De fato, isso é fonte de muitos problemas em aberto e tópicos da presente tese. Destacamos por exemplo a **conjectura F** formulada no artigo **A conjecture on the existence of compact leaves of algebraic foliations** por T. Ekedahl, N. Shepherd-Barron e R. Taylor. Tal conjectura consiste em um critério para algebricidade: uma folheação \mathcal{F} em uma variedade quase-projetiva complexa admite uma integral primeira racional se e somente se a folheação obtida por redução módulo p , \mathcal{F}_p , é p -fechada para quase-todo primo p . O termo quase todo primo p significa que se R é álgebra de definição de X então \mathcal{F}_p é p -fechada para todo ideal maximal p que está em um aberto de $\text{Spec}(R)$.

1.1 Descrição dos capítulos

O objetivo do presente trabalho consiste em estudar propriedades de folheações de codimensão um em característica positiva e suas aplicações. Apresentamos, em particular, aplicações ao problema das componentes irredutíveis do espaço de folheações holomorfas de codimensão um e grau $d \geq 3$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$.

No que se segue apresentamos uma breve descrição dos capítulos.

- **Capítulo 2: Preliminares.** Apresentamos o material preliminar que consiste essencialmente de definições básicas sobre folheações em variedades algébricas definidas sobre um corpo algebricamente fechado. Apresentamos também uma revisão sobre as d -superfícies de Hirzebruch e uma descrição em termos de coordenadas que serão relevantes no Capítulo 5.
- **Capítulo 3: Folheações em característica positiva.** Nesse capítulo, definimos as folheações p -fechadas e não p -fechadas e relembramos sua relação com o morfismo Frobenius relativo. Exploramos algumas propriedades das folheações que não são p -fechadas definindo, em particular, o p -divisor e a p -distribuição associados. Dada uma folheação não p -fechada de codimensão um \mathcal{F} em uma variedade algébrica X definida sobre um corpo de característica $p > 0$ o p -divisor associado a \mathcal{F} , denotado por $\Delta_{\mathcal{F}}$, é definido como o divisor de degeneração do morfismo de p -curvatura. Tal morfismo associa uma seção local v do feixe tangente de \mathcal{F} à seção local v^p visto, por passagem ao quociente, como elemento do feixe $T_X/T_{\mathcal{F}}$. A p -distribuição, denotada por $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$, consiste essencialmente na maior distribuição em X contida no feixe tangente da

folheação que admite a seguinte propriedade: dada uma seção local v do feixe tangente de \mathcal{F} temos que a seção v está na distribuição $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ se e somente se o p -iterado v^p é um elemento do feixe tangente de \mathcal{F} . Veremos que existe uma sequência exata em codimensão um relacionando o p -divisor e a p -distribuição

$$0 \longrightarrow F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} \longrightarrow F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}}(-\Delta_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0$$

onde F_X é o morfismo Frobenius absoluto. Em particular, quando X é o espaço projetivo podemos comparar os graus da p -distribuição e o p -divisor em termos do grau da folheação \mathcal{F} . Na última seção do capítulo, apresentamos componentes irredutíveis especiais do espaço de folheações de codimensão um e de grau $p-2$ em \mathbb{P}_k^n ($n \geq 3$) cujo elemento genérico pode ser descrito por uma forma homogênea do tipo dF onde F é um polinômio homogêneo de grau p , onde p é a característica do corpo base.

- **Capítulo 4: Folheações p -fechadas de dimensão um em \mathbb{P}_k^n .** Nesse capítulo, estudamos o problema de exibir componentes irredutíveis para o espaço de folheações p -fechadas de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n . Para isso, reduzimos o problema ao estudo de matrizes quadradas de tamanho $n+1$ que possuem traço zero e que são p -fechadas (veja Definição 4.3.1). Seja k um corpo algebricamente fechado de característica positiva p e denote por $\text{Fol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$ o espaço parametrizando as folheações de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n ($n \geq 2$) que são p -fechadas. Para cada $[\alpha_0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_{n-1} : \alpha_n] \in \mathbb{P}_k^n$ denote por $\mathcal{F}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ a folheação de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n determinada pelo campo

$$v(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \alpha_0 x_0 \partial_{x_0} + \alpha_1 x_1 \partial_{x_1} + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} \partial_{x_{n-1}} + \alpha_n x_n \partial_{x_n}$$

e considere a seguinte subvariedade de $\text{Fol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$:

$$V(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \overline{\{\mathcal{F} \in \text{Fol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0) \mid \mathcal{F} \text{ é conjugada via } \text{Aut}(\mathbb{P}_k^n) \text{ a } \mathcal{F}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)\}}$$

onde a barra significa o fecho de Zariski.

O principal resultado do capítulo consiste no seguinte teorema.

Teorema A. *Suponha que p não divide $n+1$. Se $[\alpha_0 : \dots : \alpha_n] \in \mathbb{P}_k^n(\mathbb{F}_p)$ e $\sum_i \alpha_i = 0$ então $V(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$. Além disso, toda componente irredutível de tal espaço é dessa forma.*

Como consequência do teorema acima resultará que o número das componentes irredutíveis de $\text{Fol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$ depende da característica p sendo limitado inferiormente por $p^{n-1}/(n-1)!$ e superiormente por p^n .

- **Capítulo 5: Folheações em superfícies e o p -divisor em \mathbb{P}_k^2 e Σ_d .** Dado um corpo k algebricamente fechado de característica $p > 0$ um resultado contido em [39] garante que qualquer folheação em \mathbb{P}_k^2 com grau $d < p$ sempre admite uma curva algébrica invariante (mostramos algo mais geral na Proposição 3.3.12). Mostramos ainda na Proposição 3.3.11 que se uma folheação em uma superfície algébrica X sobre k é não p -fechada então qualquer curva algébrica irredutível invariante deve estar contida no suporte do p -divisor de tal folheação. Tal resultado implica, em particular, que se o p -divisor de uma folheação não p -fechada em \mathbb{P}_k^2 é irredutível então a folheação admite uma única curva algébrica invariante o que nos diz algo sobre a estrutura das curvas

algébricas invariantes, em particular, sobre os graus de tais curvas. Nesse sentido, podemos indagar sobre a estrutura do p -divisor de uma folheação não p -fechada em uma superfície algébrica X definida sobre k . Por exemplo, será que muitas folheações em \mathbb{P}_k^2 possuem p -divisor reduzido? Irredutível?

No Capítulo 5 visamos dar uma resposta para o problema acima para folheações em \mathbb{P}_k^2 e nas d -superfícies de Hirzebruch $\Sigma_d (d \geq 0)$ onde mostramos, sob certas condições, que o p -divisor de uma folheação genérica em \mathbb{P}_k^2 e em Σ_d é reduzido.

O capítulo visa estabelecer os seguintes resultados.

Teorema B. *Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$. Uma folheação genérica em \mathbb{P}_k^2 de grau $d \geq 1$ com $p \nmid d + 2$ tem p -divisor reduzido.*

Teorema C. *Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$. Sejam Σ_d a d -superfície de Hirzebruch sobre k e $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Sejam F uma fibra da projeção natural $\pi : \Sigma_d \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ e M_d uma seção satisfazendo as condições*

$$F \cdot M_d = 1 \quad , \quad M_d^2 = d.$$

Então, uma folheação genérica em Σ_d com fibrado normal N numericamente equivalente a $(d_1 - d + 2)F + (d_2 + 2)M_d$ possui p -divisor reduzido.

- **Capítulo 6: Novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_\mathbb{C}^3)$ via característica positiva.** Nesse capítulo, apresentamos uma aplicação dos resultados estabelecidos nos capítulos anteriores ao estudo de componentes irredutíveis do espaço de folheações holomorfas de codimensão um e grau $d \geq 3$ em $\mathbb{P}_\mathbb{C}^3$. Sejam k um corpo algebricamente fechado, $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ inteiros e defina $d = d_1 + d_2 + 2$. Suponha que $d \geq 3$ e denote por $\text{Fol}_{(d_1, d_2)}(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1)$ o espaço parametrizando as folheações em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com divisor canônico de tipo (d_1, d_2) e denote por $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3)$ o espaço parametrizando as folheações de codimensão um e grau $d \geq 3$ em \mathbb{P}_k^3 . Denote por $\text{Map}_1(\mathbb{P}_k^3, \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1)$ a coleção de mapas racionais $\psi : \mathbb{P}_k^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ que possuem grau um, isto é, dados por polinômios homogêneos de grau um. O principal resultado do capítulo consiste no seguinte teorema.

Teorema D. *Suponha que k seja um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e que $p > d + 2$. Considere o mapa racional*

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Map}_1(\mathbb{P}_k^3, \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1) \times \text{Fol}_{(d_1, d_2)}(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1) &\dashrightarrow \text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\mapsto \Phi^* \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Seja $X_{(d; d_1, d_2)}$ o fecho de Zariski da imagem de Ψ . Então, $X_{(d; d_1, d_2)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3)$.

Por princípios gerais relacionados a redução módulo p veremos no capítulo que o teorema acima implica o seguinte teorema.

Teorema E. *Considere o mapa racional*

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Map}_1(\mathbb{P}_\mathbb{C}^3, \mathbb{P}_\mathbb{C}^1 \times \mathbb{P}_\mathbb{C}^1) \times \text{Fol}_{(d_1, d_2)}(\mathbb{P}_\mathbb{C}^1 \times \mathbb{P}_\mathbb{C}^1) &\dashrightarrow \text{Fol}_d(\mathbb{P}_\mathbb{C}^3) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\mapsto \Phi^* \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Seja $C_{(d; d_1, d_2)}$ o fecho de Zariski da imagem de Ψ . Então, $C_{(d; d_1, d_2)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_\mathbb{C}^3)$.

1.2 Notações

Nessa seção apresentamos as notações que serão introduzidas e utilizadas ao longo do texto.

- k = corpo algebricamente fechado.
- Curva em uma superfície projetiva X = um divisor efetivo em X .
- $\Sigma_d = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) = S(0, d) = d$ -superfície de Hirzebruch sobre k ($d \geq 0$).
- $\mathbf{Spec}(R)$ = coleção de ideais primos de um anel comutativo R .
- $\mathbf{Spm}(R)$ = coleção de ideais maximais de um anel comutativo R .
- F_X = morfismo Frobenius absoluto.
- $F_{X/k}$ = morfismo Frobenius relativo.
- $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ = p -distribuição associada a uma folheação de codimensão um \mathcal{F} não p -fechada.
- $\Delta_{\mathcal{F}}$ = p -divisor associado a uma folheação de codimensão um não p -fechada \mathcal{F} .
- Se X é uma superfície projetiva não singular, \equiv denota a equivalência numérica em $\text{Div}(X)$.
- Se X é uma superfície projetiva não singular, $\text{Num}_{\mathbb{Q}}(X) = (\text{Div}(X)/\equiv) \otimes \mathbb{Q}$.
- $U(X, H, N), V(X, H, \mathcal{N})$ = abertos do Lema 5.2.8.
- Se (X, H) é uma superfície projetiva lisa polarizada e D é um divisor em X , $\deg(D) = D \cdot H$.
- $m_Q(C)$ = multiplicidade de uma curva $C \subset X$ em um ponto $Q \in X$.
- Se $\pi_Q : \text{Bl}_Q(X) \rightarrow X$ é a explosão centrada em Q , \mathcal{F} uma folheação em X , $\mathcal{G} = \pi_Q^* \mathcal{F}$ e E divisor excepcional, $l(Q) = \text{ord}_E(N_{\mathcal{G}}^* - \pi_Q^* N_{\mathcal{F}}^*)$.
- $\mathbb{F}\text{ol}_d(\mathbb{P}_k^n)$ = espaço parametrizando as folheações em \mathbb{P}_k^n que são de codimensão um e grau $d \geq 0$.
- $\mathbb{F}\text{ol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^3)$ = espaço parametrizando folheações de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^3 .
- $\text{Tr}(0; n)$ = espaço parametrizando matrizes quadradas de tamanho n com traço zero.
- $\text{Tr}_0(0; n)$ = espaço parametrizando matrizes quadradas de tamanho n com traço zero e que são p -fechadas.
- $\mathbb{F}\text{or}(j, d; n+1)$ = projetivização do k -espaço vetorial das j -formas homogêneas em \mathbb{A}_k^{n+1} de grau d nos coeficientes.
- $\mathbb{F}\text{or}_0(j, d; n+1)$ = fechado em $\mathbb{F}\text{or}(j, d; n+1)$ que consiste nas j -formas homogêneas de grau d em \mathbb{A}_k^{n+1} que são projetivas, isto é, $i_R \sigma = 0$ para todo $[\sigma] \in \mathbb{F}\text{or}_0(j, d; n+1)$ onde R é o campo radial $R = \sum_{i=0}^n x_i \partial_{x_i}$.

- Folheação em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ de tipo (d_1, d_2) = Folheação em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com divisor canônico numericamente equivalente ao divisor $d_1F + d_2M$ onde F e M são, respectivamente, fibras da primeira e segunda projeção de $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ em \mathbb{P}_k^1 .
- $O(2)$ = termos de ordem pelo menos 2.

Capítulo 2

Preliminares

Resumo. Neste capítulo apresentamos a definição de distribuições e folheações em uma variedade algébrica não singular definida sobre um corpo algebricamente fechado k e relembramos a definição da d -superfície de Hirzebruch e suas transformações elementares que serão usadas nos próximos capítulos.

2.1 Distribuições e folheações

Seja X uma variedade algébrica não singular definida sobre um corpo algebricamente fechado k . Suponha que X possui dimensão pelo menos dois.

Definição 2.1.1. *Uma distribuição \mathcal{D} em X consiste em um subfeixe coerente $T_{\mathcal{D}}$ saturado de T_X , isto é, $T_X/T_{\mathcal{D}}$ é livre de torção.*

O feixe $T_{\mathcal{D}}$ é chamado de feixe tangente da distribuição \mathcal{D} . A dimensão de \mathcal{D} é definida como o posto genérico de $T_{\mathcal{D}}$. A codimensão de \mathcal{D} é definida como sendo o inteiro $\dim X - \dim \mathcal{D}$.

Definição 2.1.2. *Seja \mathcal{D} uma distribuição em X . O feixe conormal de \mathcal{D} é definido como*

$$\Omega_{X/\mathcal{D}}^1 = \{\omega \in \Omega_X^1 \mid i_v \omega = 0 \text{ para todo } v \in T_{\mathcal{D}}\}.$$

Seja \mathcal{E} um \mathcal{O}_X -módulo em X . Relembre que seu dual \mathcal{E}^* é definido como sendo o feixe $\mathcal{E}^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$. Observe que existe um mapa natural

$$\alpha : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{**}$$

que a cada seção local $e \in \mathcal{E}$ associa $\alpha(e)$ onde para cada $h \in \mathcal{E}^*$ temos que $\alpha(e)(h) = h(e)$.

Proposição 2.1.3. *Seja X uma variedade algébrica lisa e \mathcal{E} um \mathcal{O}_X -módulo coerente livre de torção. Então α é injetivo.*

Demonstração. Veja [24, Lemma 1.5]. □

Desse modo, $T_X/T_{\mathcal{D}}$ pode ser visto como um subfeixe de $N_{\mathcal{D}} = (T_X/T_{\mathcal{D}})^{**}$. O feixe $N_{\mathcal{D}}$ é chamado de feixe normal da distribuição \mathcal{D} . Note que $\Omega_{X/\mathcal{D}}^1 \cong N_{\mathcal{D}}^*$ e quando \mathcal{D} possui

codimensão um, isto é, $T_{\mathcal{D}}$ possui posto $\dim X - 1$ segue de [23, Proposition 1.9] que $N_{\mathcal{D}}$ é um feixe invertível.

Definição 2.1.4. *Seja \mathcal{E} um \mathcal{O}_X -módulo em X . Dizemos que \mathcal{E} é reflexivo se o mapa natural $\alpha : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{**}$ é um isomorfismo.*

Lema 2.1.5. *Seja \mathcal{D} uma distribuição em uma variedade algébrica não singular X . Então, $T_{\mathcal{D}}$ é reflexivo.*

Demonstração. Como $T_{\mathcal{D}}$ é um subfeixe saturado de T_X podemos aplicar [45, Lemma 31.12.7]. \square

Seja \mathcal{D} uma distribuição em X . O dual de $T_{\mathcal{D}}$ será chamado o feixe cotangente da distribuição \mathcal{D} e será denotado por $\Omega_{\mathcal{D}}^1$. O determinante de $\Omega_{\mathcal{D}}^1$ será chamado de feixe canônico da distribuição e será denotado por $\omega_{\mathcal{D}}$, isto é

$$\omega_{\mathcal{D}} = \left(\bigwedge^{\dim \mathcal{D}} \Omega_{\mathcal{D}}^1 \right)^{**}.$$

Observe que pela [23, Proposition 1.10] garantimos que existe um isomorfismo

$$\Omega_{\mathcal{D}}^1 \cong \left(\bigwedge^{\dim \mathcal{D}-1} T_{\mathcal{D}} \right)^{**} \otimes \omega_{\mathcal{D}}.$$

Em particular, se $\dim \mathcal{D} = 2$ então obtemos

$$\Omega_{\mathcal{D}}^1 \cong T_{\mathcal{D}} \otimes \omega_{\mathcal{D}}.$$

Definição 2.1.6. *Seja \mathcal{D} uma distribuição em X . O conjunto singular de \mathcal{D} é definido pondo*

$$\text{sing}(\mathcal{D}) = \{x \in X \mid (T_X/T_{\mathcal{D}})_x \text{ não é um } \mathcal{O}_{X,x}\text{-módulo livre}\}.$$

Como $T_X/T_{\mathcal{D}}$ é livre de torção temos que $\text{sing}(\mathcal{D})$ é um fechado em X que possui codimensão pelo menos dois. Temos ainda que $T_{\mathcal{D}}$ é localmente livre fora de $\text{sing}(\mathcal{D})$ (veja [20, section 2]).

Observação 2.1.7. *Seja \mathcal{D} uma distribuição em X de codimensão $q \geq 1$. Considere a inclusão $N_{\mathcal{D}}^*$ de Ω_X^1 . Tomando o q -ésimo produto exterior de tal inclusão obtemos um morfismo não nulo de $\det(N_{\mathcal{D}}^*)$ para Ω_X^q . Em particular, resulta daí que uma distribuição de codimensão q em X induz uma seção global não nula $\omega \in H^0(X, \Omega_X^q \otimes \det(N_{\mathcal{D}}))$ que possui zeros de codimensão maior do que ou igual a 2. Reciprocamente, seja \mathcal{I} um feixe invertível em X e $\omega \in H^0(X, \Omega_X^q \otimes \mathcal{I})$ uma seção não nula com zeros de codimensão pelo menos 2. Suponha que ω seja localmente decomponível, isto é, para todo $x \in X - \text{sing}(\mathcal{D})$ existe um aberto U contendo x tal que $\omega|_U = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q$ para algumas 1-formas $\omega_i \in \Omega_X^1(U)$. Então, obtemos uma distribuição de codimensão q em X considerando núcleo do mapa dado pela contração por ω :*

$$T_X \rightarrow \Omega_X^{q-1} \otimes \mathcal{I}.$$

A distribuição definida por ω é uma folheação se e somente se $d\omega_i \wedge \omega = 0$ para todo i na decomposição local de ω (veja [15, Proposition 1.2.2 e Proposition 1.2.2]).

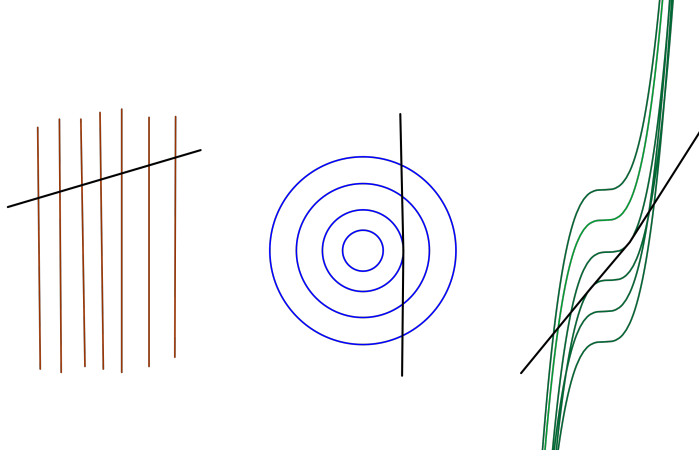


Figura 2-1: Representação esquemática de folheações grau 0, 1 e 2 em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$

Definição 2.1.8. *Seja \mathcal{D} uma distribuição em X . Dizemos que \mathcal{D} é uma folheação em X se o \mathcal{O}_X -morfismo*

$$\bigwedge^2 T_{\mathcal{D}} \longrightarrow N_{\mathcal{D}} \quad v_1 \wedge v_2 \mapsto [v_1, v_2] \pmod{T_{\mathcal{D}}}$$

é identicamente nulo.

2.1.1 Distribuições de codimensão um em $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n$

Pela Observação 2.1.7 uma distribuição \mathcal{D} de codimensão um em $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n$ é dada por uma seção global não nula $\omega \in H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n, \Omega_{\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n}^1 \otimes \mathcal{I})$ para algum feixe invertível \mathcal{I} que possui zeros de codimensão pelo menos 2. Seja $l = \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$ uma reta mergulhada linearmente em $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n$. Seja d o número de tangências de l com a distribuição \mathcal{D} . Tal inteiro é chamado de grau da distribuição. A restrição ω_l de ω a l define uma seção do fibrado $\Omega_l^1 \otimes \mathcal{I}|_l = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1}(d)$ e daí resulta que $\deg(\mathcal{I}) = d + 2$. Relembre (veja [1, Corollary 17.1.3]) que para todo inteiro q tal que $1 \leq q \leq n$ existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n}^q \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n}(-q)^{\binom{n+1}{q}} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n}^{q-1} \longrightarrow 0.$$

A descrição da sequência exata acima quando $q = 1$ implica que uma distribuição \mathcal{D} de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n$ se identifica, módulo multiplicação por elementos de k^* , com uma 1-forma

$$\omega = \sum_{i=0}^n A_i dx_i$$

em $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n+1}$ com A_i polinômios homogêneos de grau $d + 1$ para todo índice i e tal que $i_R \omega = 0$, onde R é o campo radial:

$$R = x_0 \partial_{x_0} + \cdots + x_n \partial_{x_n}.$$

A distribuição definida por ω é uma folheação se e somente se $\omega \wedge d\omega = 0$ (veja [13, Section 1.3]). Denotaremos o espaço de distribuições e folheações de codimensão um e grau d

respectivamente por $\mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_k^n)$ e $\mathbb{D}is_d(\mathbb{P}_k^n)$. Explicitamente,

$$\mathbb{D}is_d(\mathbb{P}_k^n) = \{[\omega] \in \mathbb{P}(\mathbb{H}^0(\mathbb{P}_k^n, \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(d+2))) \mid \text{codim}(\text{sing}(\omega)) \geq 2\};$$

$$\mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_k^n) = \{[\omega] \in \mathbb{P}(\mathbb{H}^0(\mathbb{P}_k^n, \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(d+2))) \mid \text{codim}(\text{sing}(\omega)) \geq 2 \text{ e } \omega \wedge d\omega = 0\}.$$

Exemplo 2.1.9. Fixe $x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n$ como funções coordenadas de \mathbb{P}_k^{2n+1} e considere a distribuição \mathcal{D} definida pela 1-forma

$$\omega = \sum_{i=0}^n (x_i dy_i - y_i dx_i).$$

Se o corpo base possui característica dois então ω é integrável já que temos $d\omega = 0$. Por outro lado, ω não define uma folheação quando o corpo base tem característica diferente de dois.

2.2 Superfícies de Hirzebruch

Seja X uma superfície projetiva não singular definida sobre um corpo algebricamente fechado k . Dadas duas curvas D_1 e D_2 em X diremos que D_1 é numericamente equivalente a D_2 se $D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$ para toda curva C em X . Nesse caso, escrevemos $D_1 \equiv D_2$. Denotaremos por $\text{Num}_{\mathbb{Q}}(X) = (\text{Div}(X)/\equiv) \otimes \mathbb{Q}$ o \mathbb{Q} -espaço vetorial dos divisores em X módulo equivalência numérica.

Definição 2.2.1. Sejam X uma superfície projetiva e C uma curva não singular definidas sobre k . Dizemos que X é geometricamente regrada sobre C se existir um morfismo liso $\pi : X \rightarrow C$ tal que toda fibra é isomorfa a \mathbb{P}_k^1 .

Proposição 2.2.2. Seja $\pi : X \rightarrow C$ uma superfície regrada sobre k . Então, X é isomorfa a um \mathbb{P}_k^1 -fibrado associado a um feixe localmente livre E de posto 2 sobre C , isto é, $X \cong \mathbb{P}_C(E)$ e $\mathbb{P}_C(E) \cong \mathbb{P}_C(E')$ se e somente se $E \cong E' \otimes \mathcal{I}$ para algum feixe invertível \mathcal{I} .

Demonstração. Ver [22, Chapter V, proposition 2.2]. □

Observação 2.2.3. Pelo Teorema de Grothendieck (veja [25, Theorem 4.1]) sabemos que todo feixe localmente livre em \mathbb{P}_k^1 é decomponível. Assim, se E é um feixe localmente livre em \mathbb{P}_k^1 de posto 2 temos que $E = E_1 \oplus E_2$ e torcendo por um $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(k)$ conveniente podemos supor que E_1 é trivial e que $E_2 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(n)$ com $n \geq 0$. Nesse caso temos $E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(k) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(n)$ para algum $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Definição 2.2.4. Seja $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. A d -superfície de Hirzebruch é a superfície

$$\Sigma_d = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(d)).$$

Pela proposição e observação acima temos

Proposição 2.2.5. Uma superfície geometricamente regrada sobre \mathbb{P}_k^1 é uma superfície de Hirzebruch.

Proposição 2.2.6. Sejam $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $\pi : \Sigma_d \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ a d -superfície de Hirzebruch. Então,

- Se $d > 0$ então existe uma e só uma curva irredutível E em Σ_d de auto interseção $-d$, isto é, se e é a classe de E em $\text{Num}_{\mathbb{Q}}(\Sigma_d)$ então $e^2 = -d$.
- Se $e, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ são distintos então Σ_d não é isomorfa a Σ_e .

Demonstração. O argumento em [2, Proposition IV] se aplica quando k é qualquer corpo algebricamente fechado. \square

2.2.1 Transformações elementares

Seja $\pi: X \rightarrow C$ uma superfície regradada e $p \in X$. Seja F a fibra de π contendo p e considere a explosão centrada em p , $Bl_p: Bl_p(X) \rightarrow X$. Como F é uma fibra temos que $F^2 = 0$ e se \tilde{F} denota a transformada estrita da curva F em $Bl_p(X)$ então temos que $\tilde{F}^2 = -1$. Pelo Teorema de contratibilidade de Castelnuovo existe uma contração de \tilde{F} , isto é, uma superfície lisa X' e um morfismo $c_{\tilde{F}}: Bl_p(X) \rightarrow X'$ tal que $c_{\tilde{F}}(\tilde{F}) = \text{pt}$. Desse modo obtemos uma outra superfície regradada sobre C , $\pi': X' \rightarrow C$, e um mapa birracional $\Phi = c_{\tilde{F}} \circ Bl_p: X \rightarrow X'$. O mapa Φ_p é chamado de transformação elementar sobre p .

Suponha agora que $X = \Sigma_d$. Nesse caso, temos que existem dois tipos de transformações elementares. Seja E a única curva em X com $E^2 = -d$. Seja $p \in \Sigma_d$ e considere Φ a transformação elementar sobre p . Se $p \notin E$ então temos que $X' = \Sigma_{d+1}$ e nesse caso denotamos Φ_p por Φ_{d+1}^d . Se $p \in E$ então temos que $X' = \Sigma_{d-1}$ e nesse caso denotamos Φ_p por Φ_{d-1}^d .

2.2.2 Uma descrição em termos de coordenadas

No estudo de folheações em superfícies de Hirzebruch que faremos no Capítulo 5 iremos usar uma descrição explícita que envolve coordenadas. Nesta subseção, fazemos essa descrição explícita. Mais detalhes podem ser encontrados no texto [42]. Todas as variedades consideradas nesta seção estão definidas sobre um corpo algebricamente fechado k .

Sejam $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$ inteiros não negativos tais que $0 \leq a_0 \leq a_1$ e \mathbb{G}_m o grupo multiplicativo de k . Seja $\mu(a_0, a_1)$ a ação de $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ em $X = \mathbb{A}_k^2 - 0 \times \mathbb{A}_k^2 - 0$ que é definida explicitamente pondo

$$\begin{aligned} \mu(a_0, a_1): \mathbb{G}_m^2 \times X &\longrightarrow X \\ ((\lambda, \mu), (x_0, x_1; y_0, y_1)) &\mapsto (\lambda x_0, \lambda x_1; \lambda^{-a_0} \mu y_0, \lambda^{-a_1} \mu y_1). \end{aligned}$$

A scroll racional de tipo (a_0, a_1) denotada por $S(a_0, a_1)$ é definida como o quociente de $\mathbb{A}_k^2 - 0 \times \mathbb{A}_k^2 - 0$ pela ação $\mu(a_0, a_1)$.

Observe que para todo $(x_0, x_1) \in \mathbb{A}_k^2$ com $x_1 \neq 0$ temos que o quociente x_0/x_1 é invariante pela ação $\mu(a_0, a_1)$. Assim, obtemos um morfismo

$$\begin{aligned} \pi: S(a_0, a_1) &\longrightarrow \mathbb{P}_k^1 \\ \overline{(x_0, x_1 : y_0, y_1)} &\mapsto [x_0 : x_1]. \end{aligned}$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & X/\mu(a_0, a_1) \\ \downarrow p_1 & & \downarrow \pi \\ \mathbb{A}_k^2 - 0 & \longrightarrow & \mathbb{P}_k^1 \end{array}$$

onde $p_1 : X \rightarrow \mathbb{A}_k^2 - 0$ é a projeção natural.

Dado $(a_0, a_1) \in \mathbb{Z}^2$ com $0 \leq a_0 \leq a_1$ temos que $S(a_0, a_1)$ é uma superfície projetiva não singular. A estrutura projetiva em $S(a_0, a_1)$ é obtida considerando o mergulho em \mathbb{P}^N definido pela lista de monômios (veja [42, Theorem 2.5]):

$$\{S^{a_0}y_0, S^{a_0}y_1\} \cup \{S^{a_1}y_0, S^{a_1}y_1\}$$

onde para cada $j, k \in \{0, 1\}$ temos $S^{a_j}y_k = \{x_0^{a_j}y_k, x_0^{a_j-1}x_1y_k, \dots, x_1^{a_j}y_k\}$. Para ver que $S(a_0, a_1)$ é lisa de dimensão dois basta notar que tal superfície admite uma cobertura $\{U_{00}, U_{01}, U_{10}, U_{11}\}$ onde para cada $i, j \in \{0, 1\}$ temos que $U_{ij} = \{x_i \neq 0\} \cap \{y_j \neq 0\} \cong \mathbb{A}_k^2$. Assim, cada ponto $x \in S(a_0, a_1)$ admite uma vizinha isomorfa a \mathbb{A}_k^2 e assim é um ponto liso de $S(a_0, a_1)$.

Sejam $G \in k[x_0, x_1, y_0, y_1]$ um polinômio não constante e $a_0, a_1, e, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ com $a_0 \leq a_1$. Dizemos que G é um polinômio de bigrau (e, d) e de tipo (a_0, a_1) se para qualquer monômio $x_0^{e_0}x_1^{e_1}y_0^{d_0}y_1^{d_1}$ ocorrendo no suporte de G temos

$$e_0 + e_1 = a_0d_0 + a_1d_1 + e \quad \text{e} \quad d = d_0 + d_1.$$

O k -espaço de tais polinômios será denotado por $\mathcal{P}(e, d; a_0, a_1)$. Denote por \mathcal{S} a superfície $S(a_0, a_1)$. Seja F uma fibra da projeção natural $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{P}_k^1$. Fixe $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $a + b = a_0$ e seja M o divisor em \mathcal{S} dado pela expressão $x_0^a x_1^b y_0$. Pelo [42, 2.7. Lemma] temos que $\text{Pic}(\mathcal{S}) = \mathbb{Z}[F] \oplus \mathbb{Z}[M]$. Usando tal descrição resulta que as seções globais do feixe $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(eF + dM)$ se identificam com o k -espaço vetorial

$$H^0(\mathcal{S}, \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(eF + dM)) \cong \mathcal{P}(e, d; a_0, a_1).$$

Exemplo 2.2.7. $S(0, 0) = \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ e $S(a_0, a_1)$ é isomorfa a $S(b_0, b_1)$ se e somente se $a_i = b_i + d$ para todo i e algum $d \in \mathbb{Z}$ (veja [42]).

2.2.3 Equações globais para folheações em Σ_d

Quando $a_0 = 0$ e $a_1 = d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ obtemos a superfície projetiva $S(0, d)$ que é isomorfa a d -superfície de Hirzebruch Σ_d . O mapa que realiza a estrutura regrada é dada pela projeção natural:

$$\begin{aligned} \pi : S(a_0, a_1) &\longrightarrow \mathbb{P}_k^1 \\ \overline{(x_0, x_1 : y_0, y_1)} &\mapsto [x_0 : x_1]. \end{aligned}$$

Sejam $F = \{x_0 = 0\}$ fibra de π e M_d a curva definida pela equação $y_0 = 0$ em $S(0, d)$. Então valem as seguintes identidades numéricas:

$$F^2 = 0 \quad F \cdot M_d = 1 \quad \text{e} \quad M_d^2 = d.$$

Para ver a última identidade, note que M_d é um divisor linearmente equivalente ao divisor $D = dF + M_{-d}$, onde M_{-d} é o divisor descrito pela equação $y_1 = 0$. De fato, se $f = \frac{x_0^d y_1}{y_0}$ então, f é uma função racional em $S(0, d)$ com divisor dado por $\text{div}(f) = D - M_d$. Daí, resulta $M_d^2 = M_d \cdot (dF + M_{-d}) = dM_d \cdot F + M_d \cdot M_{-d} = d$. A seção negativa nesse caso é dada explicitamente pelo divisor $M_{-d} = \{y_1 = 0\}$. Para ver isso, note que a equivalência numérica $M_{-d} \equiv -M_d + dF$ implica que $M_{-d}^2 = (-M_d + dF)^2 = d - 2d = -d$. As folheações em $\Sigma_d \cong S(0, d)$ admitem uma representação bem explícita em termos de coordenadas. Na próxima

proposição, para simplificar notação, denotaremos por $\mathcal{O}_{\Sigma_d}(e, d)$ o feixe $\mathcal{O}_{\Sigma_d}(eF + dM_d)$.

Proposição 2.2.8. *Sejam $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$. Seja $N = \mathcal{O}_{\Sigma_d}(d_1 - d + 2, d_2 + 2)$. Então, qualquer folheação \mathcal{F} em Σ_d com fibrado normal N é unicamente determinada, módulo multiplicação de elementos de k , por uma 1-forma diferencial do tipo*

$$\Omega = A_0 dx_0 + A_1 dx_1 + B_0 dy_0 + B_1 dy_1$$

onde $A_0, A_1 \in H^0(\Sigma_d, \mathcal{O}(d_1 - d + 1, d_2 + 2))$, $B_0 \in H^0(\Sigma_d, \mathcal{O}_{\Sigma_d}(d_1 - d + 2, d_2 + 1))$ e $B_1 \in H^0(\Sigma_d, \mathcal{O}_{\Sigma_d}(d_1 + 2, d_2 + 1))$ são bihomogêneos e satisfazem as seguintes condições:

$$x_0 A_0 + x_1 A_1 - dy_1 B_1 = 0,$$

$$y_0 B_0 + y_1 B_1 = 0.$$

Demonstração. Uma folheação em $\Sigma_d \cong S(0, d)$ com fibrado normal N é determinada por uma seção global não nula $\omega \in H^0(\Sigma_d, \Omega_{\Sigma_d}^1 \otimes N)$. Existe uma sequência exata, a sequência exata de Euler generalizada para Σ_d , que permite escrever Ω_d^1 como o núcleo de um mapa de feixes (veja [11, Section 3])

$$0 \longrightarrow \Omega_{\Sigma_d}^1 \longrightarrow \mathcal{O}_{\Sigma_d}(-1, 0) \oplus \mathcal{O}_{\Sigma_d}(-1, 0) \oplus \mathcal{O}_{\Sigma_d}(0, -1) \oplus \mathcal{O}_{\Sigma_d}(d, -1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\Sigma_d}^2 \longrightarrow 0.$$

Usando a sequência exata acima podemos descrever folheações em Σ_d com coeficientes em N . Denote por $V_d(e_1, e_2)$ o k -espaço

$$H^0(\mathcal{O}_{\Sigma_d}(e_1 - 1, e_2)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\Sigma_d}(e_1 - 1, e_2)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\Sigma_d}(e_1, e_2 - 1)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\Sigma_d}(e_1 + d, e_2 - 1)).$$

Torcendo a sequência exata de Euler pelo fibrado $\mathcal{O}_{\Sigma_d}(e_1, e_2)$ e pela descrição da sequência exata de Euler a nível de seções globais (veja [11, Section 3]) segue que para qualquer fibrado $\mathcal{O}_{\Sigma_d}(e_1, e_2)$ o k -espaço $H^0(\Sigma_d, \Omega_{\Sigma_d}^1(e_1, e_2))$ se identifica com o núcleo do k -mapa

$$\delta_d(e_1, e_2) : V_d(e_1, e_2) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\Sigma_d}(e_1, e_2) \oplus \mathcal{O}_{\Sigma_d}(e_1, e_2))$$

que associa (A_0, A_1, B_0, B_1) a $(x_0 A_0 + x_1 A_1 - dy_1 B_1, y_0 B_0 + y_1 B_1)$. Tomando $e_1 = d - d + 2$ e $e_2 = d_2 + 2$ o resultado se segue. \square

Capítulo 3

Folheações em característica positiva

Resumo. Neste capítulo apresentamos a definição de folheações p -fechadas e não p -fechadas, definimos a p -distribuição e o p -divisor associados a uma folheação de codimensão um e estudamos suas propriedades.

3.1 Introdução

Em característica positiva p existem duas classes de folheações: as folheações p -fechadas e as folheações não p -fechadas. Definimos uma folheação como sendo p -fechada se seu feixe tangente é estável por p -potências. A classe das folheações p -fechadas é a versão em característica positiva da classe das folheações holomorfas que admitem uma integral primeira meromorfa. Pode-se mostrar, por exemplo, que uma folheação de codimensão um em uma variedade algébrica X sobre um corpo de característica positiva é p -fechada se e somente se admite uma infinidade de hipersuperfícies invariantes (ver [5, Théorème 1]). Tal resultado é a versão do Teorema de Jouanolou-Ghys que diz que uma folheação holomorfa de codimensão um em uma variedade complexa compacta admite uma integral primeira meromorfa se e somente se admite uma infinidade de soluções algébricas (ver [19, Théorème]). A classe das folheações p -fechadas possui uma relação muito próxima com o morfismo de Frobenius relativo, algo que será lembrado na primeira seção.

Neste capítulo estudamos folheações de codimensão um em variedades algébricas definidas sobre um corpo de característica positiva com ênfase na classe das folheações não p -fechadas. Na primeira seção, apresentamos a definição das folheações p -fechadas e relembramos sua relação com o morfismo de Frobenius. Nas seções seguintes estudamos algumas propriedades das folheações que não são p -fechadas. Definimos e exploramos algumas propriedades da p -distribuição e o p -divisor associados a uma folheação de codimensão um. Na última seção apresentamos uma componente irredutível particular do espaço de folheações de codimensão um e grau $p - 2$ em \mathbb{P}_k^n , onde p é a característica do corpo base k .

3.2 Folheações p -fechadas

Fixe k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$. Relembre que um k -domínio R consiste em um anel comutativo R que contém k como subanel e que não possui divisores

de zeros, isto é, se $a, b \in R$ são tais que $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$. Dado um k -domínio R , uma k -derivação de R consiste em mapa k -linear $D : R \rightarrow R$ que satisfaz a regra de Leibniz: dados $a, b \in R$ vale $D(ab) = aD(b) + bD(a)$. No que se segue, denotaremos o conjunto de k -derivações de R por $\text{Der}_k(R)$.

Começamos a seção lembrando algumas propriedades fundamentais sobre derivações em característica positiva.

Proposição 3.2.1. *Seja R um k -domínio. Seja $D \in \text{Der}_k(R)$ uma k -derivação. Então, $D^p \in \text{Der}_k(R)$.*

Demonstração. Sejam $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $f, g \in R$. Então, vale a seguinte fórmula

$$D^N(fg) = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} D^{N-j}(f)D^j(g).$$

Tomando $N = p$ e usando o fato que $\binom{p}{j} \in \langle p \rangle$ se $j \notin \{0, p\}$ o resultado se segue. \square

Proposição 3.2.2. *Seja k um corpo de característica $p > 0$ e R um k -domínio. Sejam $f \in R$ e $v_1, v_2 \in \text{Der}_k(R)$ duas k -derivações. Então, valem as seguintes propriedades.*

- $(v_1 + v_2)^p = v_1^p + v_2^p + \sum_{j=1}^{p-1} s_j(v_1, v_2)$, onde s_j está na subálgebra de Lie de $\text{Der}_k(R)$ gerada pelas derivações v_1 e v_2 .
- $(fv_1)^p = f^p v_1^p + f v_1^{p-1} (f^{p-1}) v_1$.

Demonstração. O primeiro item está contido na fórmula 63 em [26, Chapter V, Section 7]. O segundo item é conteúdo da [28, Proposition (5.3)]. \square

Definição 3.2.3. *Sejam X uma variedade algébrica lisa definida sobre um corpo algebricamente fechado k de característica $p > 0$ e \mathcal{F} uma folheação em X . Dizemos que \mathcal{F} é p -fechada se para qualquer seção local $v \in T_{\mathcal{F}}$ temos que $v^p \in T_{\mathcal{F}}$.*

Exemplo 3.2.4. *Sejam k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e \mathcal{F} a folheação em \mathbb{A}_k^2 definida pela 1-forma $\omega = ydx - \alpha xdy$ para algum $\alpha \in k^*$. Então, \mathcal{F} é p -fechada se e somente se $\alpha \in \mathbb{F}_p$. Para ver isso, considere o campo $v_1 = \alpha x \partial_x + y \partial_y$ e note que v_1 é tangente a folheação definida por ω e que $v_1^p = \alpha^p x \partial_x + y \partial_y$. Assim, v_1^p é tangente a \mathcal{F} se e somente se $\alpha^p = \alpha$, isto é, $\alpha \in \mathbb{F}_p$. Agora, observe dado um campo $v = a(x, y) \partial_x + b(x, y) \partial_y$ temos que v é tangente a \mathcal{F} se e somente se $v = g \cdot v_1$ para algum polinômio $g \in k[x, y]$. Pela segundo item da Proposição 3.2.2 temos que $v^p = g^p v_1^p + h v_1$ para algum polinômio h . Daí, resulta que v^p é tangente a \mathcal{F} se e somente se v_1^p é tangente a \mathcal{F} .*

3.2.1 Morfismo de Frobenius e folheações p -fechadas

Nesta subseção lembramos construções relacionadas ao morfismo de Frobenius que são importantes na construção da p -distribuição que será feita nas próximas seções. Mais detalhes sobre tal morfismo podem ser encontrados em [32, section 3.2.4]. No que se segue, k será um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e X uma variedade projetiva não singular definida sobre k . Denotaremos o morfismo estrutural $X \rightarrow \mathbf{Spec}(k)$ por h .

Definição 3.2.5. O morfismo **Frobenius absoluto**, denotado por F_X , consiste no morfismo que é identidade a nível de espaços topológicos e a nível de funções é o morfismo de anéis p -potência. Mais precisamente,

$$F_X = (f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

onde $f = id$ e $f^\# : a \mapsto a^p$.

Seja F_k o Frobenius absoluto associado ao esquema $X = \mathbf{Spec}(k)$. A nível de álgebras tal morfismo é o mapa que associa $l \in k$ a $l^p \in k$. Seja $X^{[p]}$ a mudança de base de X por F_k e denote por W_X o morfismo projeção $W_X : X^{[p]} \longrightarrow X$. Considerando os morfismos F_X e h e usando a propriedade universal do produto fibrado obtemos um único mapa $F_{X/k} : X \longrightarrow X^{[p]}$ tal que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & & & \\
 \swarrow F_{X/k} & & F_X & & \\
 & X^{[p]} & \xrightarrow{W_X} & X & \\
 \searrow h & \downarrow q & & \downarrow h & \\
 & \mathbf{Spec}(k) & \xrightarrow{F_k} & \mathbf{Spec}(k) &
 \end{array}$$

Chamaremos $F_{X/k}$ de morfismo **Frobenius relativo**.

Exemplo 3.2.6. Seja X uma variedade afim em \mathbb{A}_k^n descrita pelos polinômios $f_1, \dots, f_r \in k[x_1, \dots, x_n]$, isto é, $X = \mathcal{Z}(f_1, \dots, f_r)$. Escreva

$$f_j = \sum_{\vec{i}} a_{\vec{i}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \quad e \quad f_j^{[p]} = \sum_{\vec{i}} a_{\vec{i}}^p x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}.$$

Então, $X^{[p]} = \mathcal{Z}(f_1^{[p]}, \dots, f_r^{[p]})$ e

$$\begin{aligned}
 F_{X/k} : X &\longrightarrow X^{[p]} \\
 (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1^p, \dots, x_n^p).
 \end{aligned}$$

Em particular, se $f_i \in \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n]$ para todo i , então $X^{[p]} \cong X$.

Exemplo 3.2.7. Suponha que $X = \mathbf{Spec}(R)$ para algum k -domínio R . Seja $R^{[p]} := R \otimes_{F_k} k$ onde $F_k : k \longrightarrow k$ é o mapa que associa $r \mapsto r^p$. O diagrama acima pode ser visto como a versão geométrica do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 R & & & & \\
 \swarrow F_{X/k} & & F_R & & \\
 & R^{[p]} & \xleftarrow{W_R} & R & \\
 \searrow h & \uparrow q & & \uparrow h & \\
 & k & \xleftarrow{F_k} & k &
 \end{array}$$

onde $h : l \mapsto l \cdot 1_R$, $W_R : r \mapsto r \otimes 1$, $q : l \mapsto 1 \otimes l$ e $F_{X/k} : r \otimes l \mapsto l \cdot r^p$.

Observação 3.2.8. *Seja \mathcal{E} um \mathcal{O}_X -módulo. Note que $F_*\mathcal{E}$ é igual a \mathcal{E} como feixe de grupos abelianos mas com estrutura de \mathcal{O}_X definida do seguinte modo: Dados $s \in \mathcal{E}$ e $f \in \mathcal{O}_X$ temos que $f * s = f^p \cdot s$. Se considerarmos $F_X^*\mathcal{E} = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ temos que o feixe $F_X^*\mathcal{E}$ possui estrutura de \mathcal{O}_X -módulo dada pela regra: $g \cdot (f \otimes s) = (g \cdot f) \otimes s$ para quaisquer seções locais $g, f \in \mathcal{O}_X$ e $s \in \mathcal{E}$. Em particular, vale $g^p \cdot (f \otimes s) = (g^p \cdot f) \otimes s = (g * f) \otimes s = f \otimes (g \cdot s)$ para quaisquer seções locais $g, f \in \mathcal{O}_X$ e $s \in \mathcal{E}$.*

Seja X uma variedade projetiva lisa definida sobre k e \mathcal{F} uma folheação p -fechada em X . Seja $\mathcal{O}_{X/\mathcal{F}}$ o feixe de k -álgebras definido pondo:

$$\mathcal{O}_{X/\mathcal{F}} = \{a \in \mathcal{O}_X \mid v(a) = 0 \text{ para todo } v \in T_{\mathcal{F}}\}.$$

É claro que valem as inclusões: $\mathcal{O}_X^p \subset \mathcal{O}_{X/\mathcal{F}} \subset \mathcal{O}_X$.

Proposição 3.2.9. *O feixe de k -álgebras $\mathcal{O}_{X/\mathcal{F}}$ é integralmente fechado.*

Demonstração. De fato, se $a \in k(X)$ é inteiro sobre $\mathcal{O}_{X/\mathcal{F}}$ então existe uma relação inteira de grau minimal:

$$a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \dots + b_1a + b_0 = 0$$

para alguns $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathcal{O}_{X/\mathcal{F}}$. Se $v \in T_{\mathcal{F}}$ então aplicando v na identidade acima concluímos que

$$v(a)(na^{n-1} + (n-1)b_{n-1}a^{n-1} + \dots + b_1) = 0$$

e pela minimalidade de n resulta $v(a) = 0$. Como v foi escolhido de forma arbitrária temos que $a \in \mathcal{O}_{X/\mathcal{F}}$. \square

Observe que como $\mathcal{O}_X^p \subset \mathcal{O}_{X/\mathcal{F}}$ temos que o mapa $F_{\mathcal{O}_{X/k}}: \mathcal{O}_{X^{[p]}} \rightarrow \mathcal{O}_X$, que associa $a \otimes l \mapsto a^pl$, se fatora passando por $\mathcal{O}_{X/\mathcal{F}}$, isto é, existe um digrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X^{[p]}} & \xrightarrow{F_{\mathcal{O}_{X/k}}} & \mathcal{O}_X \\ \downarrow & \nearrow i & \\ \mathcal{O}_{X/\mathcal{F}} & & \end{array}$$

Desse modo definindo $X/\mathcal{F} = \mathbf{Spec}(\mathcal{O}_{X/\mathcal{F}})$ obtemos uma variedade normal e um diagrama comutativo de mapas dominantes:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_{X/k}} & X^{[p]} \\ \downarrow \pi & \nearrow & \\ X/\mathcal{F} & & \end{array}$$

Nesse caso, diremos que X/\mathcal{F} é uma variedade entre X e $X^{[p]}$. Reciprocamente, dada uma variedade normal Y entre X e $X^{[p]}$ obtemos um subfeixe de T_X dado explicitamente por

$$T_{\mathcal{F}_Y} = \{v \in T_X \mid v(g) = 0 \text{ para todo } g \in \mathcal{O}_Y\}.$$

Proposição 3.2.10. *Existe uma correspondência 1-1 entre folheações p -fechadas em X e variedades normais Y entre X e $X^{[p]}$ dada pela correspondência*

$$\mathcal{F} \mapsto X/\mathcal{F} \qquad Y \mapsto T_{\mathcal{F}_Y}.$$

Além disso, se \mathcal{F} tem posto r e $Y = X/\mathcal{F}$ então $[k(X) : k(Y)] = p^r$ e $\mathcal{O}_{X/\mathcal{F}}$ é regular se e somente se \mathcal{F} é regular.

Demonstração. Veja [37, 1.9 Proposition]. □

3.2.2 Operador de Cartier

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e R um k -domínio local regular com ideal maximal \mathfrak{m} . No que se segue assumiremos que R é noetheriano. Um exemplo concreto de um tal k -domínio consiste na álgebra de funções regulares de uma variedade algébrica X , definida sobre k , em torno de um ponto liso x : $\mathcal{O}_{X,x}$. Denote por $R^p = \{a^p \mid a \in R\}$ o subanel de R formado pelas p -potências. Fixe t_1, \dots, t_r um sistema de parâmetros de R , isto é, um sistema minimal de geradores do ideal maximal \mathfrak{m} . Como R é regular temos que $\{dt_1, \dots, dt_r\}$ forma uma base do R -módulo de diferenciais $\Omega_{R/k}^1$ e pelo [46, Theorem 1] segue que a coleção de monômios da forma $t_1^{a_1} \dots t_r^{a_r}$ para $0 \leq a_i \leq p-1$ forma uma base de R como R^p -módulo.

Exemplo 3.2.11. *Seja $x = (0, \dots, 0) \in \mathbb{A}_k^n$ e considere a álgebra de funções regulares em torno de x : $R = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n, x}$. Note que fixando x_1, \dots, x_n como funções coordenadas de \mathbb{A}_k^n temos que $R = k[x_1, \dots, x_n]_{(x_1, \dots, x_n)}$ e R é finitamente gerado como R^p -módulo com uma base sendo formada pelos monômios $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ com $0 \leq a_i \leq p-1$.*

Defina

$$Z_{R/k}^1 = \{\omega \in \Omega_{R/k}^1 \mid d\omega = 0\} \quad \text{e} \quad B_{R/k}^1 = \{dg \in \Omega_{R/k}^1 \mid g \in R\}.$$

Seja $M(t_1, \dots, t_r)$ o R^p -módulo definido pondo

$$M(t_1, \dots, t_r) = \bigoplus_{i=1}^r R^p t_i^{p-1} dt_i.$$

Lema 3.2.12. *Todo elemento $\sigma \in Z_{R/k}^1$ se escreve de modo único como $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ onde $\sigma_1 \in B_{R/k}^1$ e $\sigma_2 \in M(t_1, \dots, t_r)$.*

Demonstração. Veja [44, Lemme 1]. □

Seja $\sigma \in Z_{R/k}^1$. Pelo Lema 3.2.12 segue que podemos escrever σ de modo único como

$$\sigma = dg + \sum_{i=1}^r u_i^p t_i^{p-1} dt_i$$

para alguns $g, u_1, \dots, u_r \in R$. Uma tal escritura será chamada de a **p -decomposição** de σ . Observe que para considerar uma tal escritura precisamos, a princípio, fixar um sistema de parâmetros $\{t_1, \dots, t_r\}$ de R . O **Operador de Cartier** é o mapa definido pondo:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}: Z_{R/k}^1 &\longrightarrow \Omega_{R/k}^1 \\ \sigma &\mapsto \sum_{i=1}^r u_i dt_i. \end{aligned}$$

Para uma versão mais intrínseca do **Operador de Cartier** sugerimos o leitor a consultar [3]. Nessa versão, tal operador é obtido como a inversa do isomorfismo (ver [3, 1.3.4 Theorem])

$$\begin{aligned}\gamma: \Omega_{R/k}^1 &\longrightarrow H_{R/k}^1 \\ rda &\mapsto [r^p a^{p-1} da]\end{aligned}$$

onde $H_{R/k}^1$ é o quociente $Z_{R/k}^1/B_{R/k}^1$ com estrutura de R -módulo dada pelo mapa de anéis $F_R: R \longrightarrow R$ que associa $r \mapsto r^p$.

Proposição 3.2.13. *O mapa C não depende do sistema de parâmetros t_1, \dots, t_r . Sejam $\omega, \sigma \in Z_{R/k}^1$ 1-formas fechadas e $f \in R$. Então, valem as seguintes propriedades:*

- $C(f^p \sigma) = f C(\sigma)$.
- $C(df) = 0$.
- $C(f^{p-1} df) = df$.
- $C\left(\frac{df}{f}\right) = \frac{df}{f}$.

Demonstração. Veja [44, Proposition 1]. □

A seguinte fórmula será de grande importância no que se seguirá.

Teorema 3.2.14. *Seja $\omega \in \Omega_{R/k}^1$ uma 1-forma fechada e $v \in \text{Der}_k(R)$ uma derivação. Então,*

$$i_v C(\omega)^p = i_{v^p} \omega - v^{p-1}(i_v \omega).$$

Demonstração. Veja [44, Proposition 3]. □

Usando a descrição local acima e globalizando as construções para uma variedade algébrica não singular definida sobre um corpo algebricamente fechado k de característica $p > 0$ obtemos a seguinte proposição.

Proposição 3.2.15. *Seja X uma variedade algébrica não singular sobre k e denote por $Z_{X/k}^1$ o subfeixe de $\Omega_{X/k}^1$ formado pelas 1-formas fechadas. Existe um operador, chamado o **Operador de Cartier**,*

$$C: Z_{X/k}^1 \longrightarrow \Omega_{X/k}^1$$

unicamente determinado pelas seguintes propriedades:

- (i) $C(\sigma_1 + \sigma_2) = C(\sigma_1) + C(\sigma_2)$.
- (ii) $C(f^p \sigma_1) = f C(\sigma_1)$.
- (iii) $C(df) = 0$.
- (iv) $C(f^{p-1} df) = df$.
- (v) $C\left(\frac{df}{f}\right) = \frac{df}{f}$.

para quaisquer seções locais $f \in \mathcal{O}_X$, $\sigma_1, \sigma_2 \in Z_{X/k}^1$.

3.3 Morfismo p -curvatura e p -divisor

Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em uma variedade projetiva lisa X definida sobre um corpo algebricamente fechado k e de característica $p > 0$. No que se segue iremos supor que $\dim X \geq 2$, a menos que seja explicitado o contrário.

Considere o seguinte morfismo de feixes de conjuntos:

$$\begin{aligned} \psi: T_{\mathcal{F}} &\longrightarrow \frac{T_X}{T_{\mathcal{F}}} \\ v &\mapsto v^p \pmod{T_{\mathcal{F}}}. \end{aligned}$$

Note que pelo primeiro item da Proposição 3.2.2 garantimos que ψ é de fato um morfismo de feixes de grupos, já que para quaisquer seções locais $v_1, v_2 \in T_{\mathcal{F}}$ vale $\psi(v_1 + v_2) = (v_1 + v_2)^p \pmod{T_{\mathcal{F}}} = v_1^p + v_2^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(v_1, v_2) \pmod{T_{\mathcal{F}}} = v_1^p + v_2^p \pmod{T_{\mathcal{F}}}$. Pelo segundo item da Proposição 3.2.2 sabemos ainda que dados $f \in \mathcal{O}_X$ e $v \in T_{\mathcal{F}}$ temos que $(f \cdot v)^p \equiv f^p \cdot v^p \pmod{T_{\mathcal{F}}}$. Assim, usando o morfismo Frobenius absoluto obtemos de fato um morfismo de \mathcal{O}_X -módulos:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{F}}: F_X^* T_{\mathcal{F}} &\longrightarrow \frac{T_X}{T_{\mathcal{F}}} \\ v &\mapsto v^p \pmod{T_{\mathcal{F}}}. \end{aligned}$$

Relembre que $N_{\mathcal{F}} = (T_X/T_{\mathcal{F}})^{**}$. Compondo $\varphi_{\mathcal{F}}$ com o morfismo injetivo natural $T_X/T_{\mathcal{F}} \rightarrow (T_X/T_{\mathcal{F}})^{**}$ (ver Proposição 2.1.3) obtemos o seguinte morfismo de \mathcal{O}_X -módulos:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{F}}: F_X^* T_{\mathcal{F}} &\longrightarrow N_{\mathcal{F}} \\ v &\mapsto v^p. \end{aligned}$$

Definição 3.3.1. *Seja X uma variedade não singular de dimensão $n \geq 2$ sobre um corpo algebricamente fechado k de característica $p > 0$. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em X . O morfismo p -curvatura associado a \mathcal{F} é o mapa de \mathcal{O}_X -módulos:*

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{F}}: F_X^* T_{\mathcal{F}} &\longrightarrow N_{\mathcal{F}} \\ \sum_i f_i \otimes v_i &\mapsto \sum_i f_i v_i^p. \end{aligned}$$

Observação 3.3.2. *Nas condições acima, a folheação \mathcal{F} é p -fechada se e somente se $\varphi_{\mathcal{F}} \equiv 0$.*

3.3.1 Folheações não p -fechadas, p -divisor e p -distribuição

Todas as variedades consideradas nesta seção possuem dimensão pelo menos dois, a menos que seja dito o contrário, e estão definidas sobre k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$. O caso de superfícies será tratado de maneira explícita no Capítulo 5.

Começamos lembrando um resultado que será importante no que se segue.

Proposição 3.3.3. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em X definida por uma 1-forma racional ω . Seja v um campo racional tangente a \mathcal{F} .*

- Se v^p não é tangente a \mathcal{F} e $f = i_{v^p} \omega$ então

$$d(f^{p-1} \omega) = 0.$$

- Para qualquer campo racional v_2 tangente a \mathcal{F} temos que o comutador $[v_2^p, v]$ é tangente a \mathcal{F} .

Demonstração. O primeiro item é conteúdo do [10, Theorem 6.2]. Já o segundo item se segue da [40, Proposition 6.1]. \square

Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em uma variedade X definida sobre um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$. Suponha que \mathcal{F} não é p -fechada. Pelo primeiro item da Proposição 3.3.3 sabemos que existe uma 1-forma racional fechada ω gerando $N_{\mathcal{F}}^*$. Considere o subfeixe $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ de $T_{\mathcal{F}}$ definido pondo

$$T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} = \{v \in T_{\mathcal{F}} \mid i_v \mathbf{C}(\omega) = 0\}$$

onde \mathbf{C} é o Operador de Cartier (ver Proposição 3.2.15 para definição). Observe que $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ independe da escolha da 1-forma racional fechada gerando $N_{\mathcal{F}}^*$. Com efeito, se σ é outra 1-forma racional fechada gerando $N_{\mathcal{F}}^*$ então existe uma função racional $f \in k(X)$ tal que $\omega = f \cdot \sigma$. Daí, pelas propriedades do Operador de Cartier, segue que $i_v \mathbf{C}(\omega) = i_v \mathbf{C}(f \cdot \sigma) = f^{1/p} \cdot i_v \mathbf{C}(\sigma)$ e daí resulta que $i_v \mathbf{C}(\omega) = 0$ se e somente se $i_v \mathbf{C}(\sigma) = 0$. Note ainda que se X é uma superfície então $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ é o feixe nulo. De fato, pelo Teorema 3.2.14 sabemos que para toda seção local $v \in T_{\mathcal{F}}$ temos que $i_v \mathbf{C}(\omega)^p = i_{v^p} \omega$ e como estamos assumindo que \mathcal{F} é não p -fechada concluímos que $v^p \notin T_{\mathcal{F}}$, já que $T_{\mathcal{F}}$ possui posto um.

Lema 3.3.4. *O feixe $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ é um subfeixe saturado de T_X .*

Demonstração. Podemos supor que $\dim X > 2$. Sejam $f \in \mathcal{O}_X$ e $v \in T_X$ seções locais tais que $f \cdot v \in T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$. Então temos $f \cdot v \in T_{\mathcal{F}}$ e $(f \cdot v)^p \in T_{\mathcal{F}}$. De fato, como $f \cdot v \in T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ temos que $i_{f \cdot v} \mathbf{C}(\omega) = 0$ e a fórmula do Teorema 3.2.14 implica que $i_{(f \cdot v)^p} \omega = i_{f \cdot v} \mathbf{C}(\omega)^p = 0$ e daí $(f \cdot v)^p \in T_{\mathcal{F}}$. Por outro lado, pelo segundo item da Proposição 3.2.2 sabemos que vale a fórmula:

$$(f \cdot v)^p = f^p v^p + g \cdot f \cdot v$$

para alguma função racional $g \in k(X)$. Daí, segue que $f^p \cdot v^p \in T_{\mathcal{F}}$ o que implica que $v^p \in T_{\mathcal{F}}$ e assim $v \in T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$. Logo, $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ é um subfeixe saturado de T_X . \square

Proposição 3.3.5. *Sejam X uma superfície projetiva não singular definida sobre um corpo algebricamente fechado k de característica $p > 0$ e \mathcal{F} uma folheação em X . Suponha que \mathcal{F} seja não p -fechada. Então, existe um divisor efetivo $\Delta_{\mathcal{F}} \in \text{Div}(X)$ e um isomorfismo $F_X^* T_{\mathcal{F}} \cong N_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-\Delta_{\mathcal{F}})$.*

Demonstração. Considere o morfismo p -curvatura associado a \mathcal{F}

$$\varphi_{\mathcal{F}}: F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}} \quad v \mapsto v^p.$$

Como \mathcal{F} não é p -fechada e $T_{\mathcal{F}}$ possui posto um segue do Teorema 3.2.14 que $\varphi_{\mathcal{F}}$ é injetivo. Agora, temos que $T_{\mathcal{F}}$ é localmente livre fora de $\text{sing}(\mathcal{F})$. Seja $U = X - \text{sing}(\mathcal{F})$ e v um campo gerando $T_{\mathcal{F}}$ em U . Então, a imagem do morfismo p -curvatura se reduz a seção induzida por v . Em U o divisor $\Delta_{\mathcal{F}}$ dado pelo lugar de anulamento da imagem de v e assim obtemos um isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{F}, \Delta_{\mathcal{F}}}: F_X^* T_{\mathcal{F}} &\longrightarrow N_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-\Delta_{\mathcal{F}}) \\ v &\mapsto v^p \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. \square

Para dimensão maior que dois vale um resultado similar.

Proposição 3.3.6. *Sejam X uma variedade projetiva não singular de dimensão maior que dois definida sobre um corpo algebricamente fechado k de característica $p > 0$ e \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em X . Suponha que \mathcal{F} seja não p -fechada. Então, $\text{Ker}(\varphi_{\mathcal{F}}) = F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ onde F_X é o mapa Frobenius absoluto. Além disso, existe um divisor efetivo $\Delta_{\mathcal{F}} \in \text{Div}(X)$ tal que a sequencia*

$$0 \longrightarrow F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} \longrightarrow F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-\Delta_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0$$

é exata em codimensão um, isto é, fora de um conjunto fechado de codimensão ≥ 2 .

Demonstração. Pelo Lema 3.3.4 sabemos que $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ é um subfeixe saturado de T_X . Como X é uma variedade não singular e como $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ é um subfeixe saturado de T_X garantimos que $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ é um feixe reflexivo (ver Lema 2.1.5). Além disso, pelo Teorema de Kunz (ver [30, Theorem 2.1]), sabemos que o morfismo de Frobenius absoluto F_X é plano. Daí, segue que $F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ também é reflexivo (ver [23, Proposition 1.8]) e um subfeixe saturado de $F_X^* T_{\mathcal{F}}$ (ver [45, Lemma 15.22.4]). Agora, note que $F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ e $\text{Ker}(\varphi_{\mathcal{F}})$ são subfeixes saturados de $F_X^* T_X$ que possuem o mesmo posto. Além disso, note que $F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} \subset \text{Ker}(\varphi_{\mathcal{F}})$. De fato, uma seção local de $F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ é da forma $\sum_i f_i \otimes v_i$ com $v_i \in T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} \subset T_{\mathcal{F}}$ para todo i . Assim, $\sum_i f_i \otimes v_i \in F_X^* T_{\mathcal{F}}$. Por outro lado, note que a fórmula no Teorema 3.2.14 implica que para todo i temos que $i_{v_i^p} \omega = i_{v_i} \mathbf{C}(\omega)^p = 0$. Daí, obtemos $\sum_i f_i i_{v_i^p} \omega = \sum_i f_i i_{v_i} \mathbf{C}(\omega)^p = 0$ o que implica $\sum_i f_i \otimes v_i \in \text{Ker}(\varphi_{\mathcal{F}})$. Logo, $F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} \subset \text{Ker}(\varphi_{\mathcal{F}})$ e pela saturação resulta a igualdade $F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} = \text{Ker}(\varphi_{\mathcal{F}})$.

Agora, como $F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ é reflexivo temos que tal feixe é localmente livre fora de um conjunto fechado de codimensão ≥ 3 , digamos S (veja [23, Corollary 1.4]). Como $F_X^* T_{\mathcal{F}}$ é localmente livre fora de $\text{sing}(\mathcal{F})$ se tomarmos $S = \text{sing}(\mathcal{F}) \cup S$ então garantimos que $F_X^* T_{\mathcal{F}}$ e $F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ são localmente livres em $U = X - Z$ de posto $n - 1$ e $n - 2$ respectivamente. Para cada $Q \in U$ escolhemos geradores locais de $T_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}}$ de modo que $n - 2$ estejam em $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}}$. Observe que uma tal escolha é possível já que $T_{\mathcal{F}}$ é livre de torção. Logo, a nível de geradores, se v_1, \dots, v_{n-1} possuem tal propriedade então a imagem do morfismo p -curvatura se reduz a uma única seção que é a induzida por v_{n-1} . No aberto U o divisor $\Delta_{\mathcal{F}}$ é dado pelo lugar de anulamento da imagem de v_{n-1} . \square

Definição 3.3.7. *Seja \mathcal{F} uma folheação não p -fechada em X . A p -**distribuição** associada a \mathcal{F} é o subfeixe de T_X definido por $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$. O p -**divisor** de \mathcal{F} é o divisor $\Delta_{\mathcal{F}}$.*

Proposição 3.3.8. *Seja \mathcal{F} uma folheação em uma superfície projetiva não singular X definida sobre k . Suponha que \mathcal{F} seja não p -fechada. Então, a identidade*

$$\mathcal{O}_X(\Delta_{\mathcal{F}}) = \omega_{\mathcal{F}}^{\otimes p} \otimes N_{\mathcal{F}}$$

vale em $\text{Pic}(X)$.

Demonstração. É uma consequência direta da Proposição 3.3.5. \square

Proposição 3.3.9. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em uma variedade projetiva não singular X de dimensão pelo menos três e definida sobre k . Suponha que \mathcal{F} seja não p -fechada. Então, a identidade*

$$\mathcal{O}_X(\Delta_{\mathcal{F}}) = \omega_{\mathcal{F}}^{\otimes p} \otimes (\omega_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}^*)^{\otimes p} \otimes N_{\mathcal{F}}$$

vale em $\text{Pic}(X)$.

Demonstração. Pela Proposição 3.3.6 sabemos que existe uma sequência exata em codimensão um:

$$0 \longrightarrow F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} \longrightarrow F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-\Delta_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0.$$

Tomando determinantes obtemos a fórmula desejada. \square

Corolário 3.3.10. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um e grau d em \mathbb{P}_k^n ($n \geq 2$). Então, vale a seguinte fórmula:*

$$\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) = p(d - n + 1) - p(\deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) - n + 2) + d + 2 = p(d - \deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) - 1) + d + 2.$$

Demonstração. Como $\omega_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(d - n + 1)$ e $N_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(d + 2)$ o corolário resulta da Proposição 3.3.9. \square

Uma propriedade interessante sobre o p -divisor consiste na seguinte proposição (compare com [39, Corollary 1]).

Proposição 3.3.11. *Seja X uma variedade não singular definida sobre um corpo algebricamente fechado k de característica $p > 0$ e \mathcal{F} uma folheação em X . Suponha que \mathcal{F} não é p -fechada e seja H uma hipersuperfície irredutível em X . Se H é \mathcal{F} -invariante então $\text{ord}_H(\Delta_{\mathcal{F}}) > 0$. Reciprocamente, se $\text{ord}_H(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\equiv 0 \pmod{p}$ então H é \mathcal{F} -invariante.*

Demonstração. Suponha que H é \mathcal{F} -invariante. Seja $R = \mathcal{O}_{X,H}$ o anel de funções regulares de X ao longo de H . Como X é não singular temos, em particular, que X é não singular em codimensão um. Em particular, segue que R é um anel local regular. Seja U um aberto afim tal que $T_{\mathcal{F}}$ é dada por campos regulares v_1, \dots, v_{n-1} e $N_{\mathcal{F}}^*$ é dada por uma 1-forma regular ω em U . Seja $\{f = 0\}$ a equação local de H em U . Note que f é um parâmetro regular para o anel R e devemos mostrar que $\text{ord}_f(\Delta_{\mathcal{F}}) > 0$. Agora, temos

$$v_i(f) = fH_i \quad , \quad \omega \wedge df = f\sigma$$

para alguns $H_i \in R$ e $\sigma \in \Omega_{R/k}^2$. Contraindo com o campo v_i^p obtemos

$$f i_{v_i^p}(\sigma) = i_{v_i^p}(\omega \wedge df) = (i_{v_i^p}\omega)df - i_{v_i^p}(df)\omega.$$

Usando a igualdade $v_i(f) = fH_i$ concluímos que $v_i^p(f) = fH_{p,i}$ para alguma função regular $H_{p,i}$. Assim,

$$f i_{v_i^p}\sigma + v_i^p(f)\omega = (i_{v_i^p}\omega)df \implies i_{v_i^p}\omega \in \langle f \rangle$$

e $\text{ord}_H(\Delta_{\mathcal{F}}) > 0$.

Reciprocamente, suponha que $\text{ord}_h(\Delta_{\mathcal{F}}) = \alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$ e escreva $\Delta_{\mathcal{F}} = f^\alpha g$ com $g \in R^*$. Pela Proposição 3.3.3 sabemos que $d(\Delta_{\mathcal{F}}^{p-1}\omega) = 0$ e expandindo tal fórmula obtemos

$$\alpha \cdot gdf \wedge \omega = f(gd\omega - dg \wedge \omega)$$

o que implica $f|df \wedge \omega$. Assim H é \mathcal{F} -invariante. \square

Proposição 3.3.12. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}_k^n ($n \geq 2$) sobre um corpo algebricamente fechado k de característica $p > 0$ e tal que $p \nmid \deg(N_{\mathcal{F}})$. Então, \mathcal{F} admite uma hipersuperfície invariante.*

Demonstração. Seja ω a 1-forma projetiva definindo a folheação \mathcal{F} . Se \mathcal{F} é p -fechada então \mathcal{F} admite de fato uma infinidade de soluções. Assim, podemos supor que \mathcal{F} é não p -fechada. Como $p \nmid \deg(N_{\mathcal{F}})$ segue do Corolário 3.3.10 que $\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Em particular, $\Delta_{\mathcal{F}}$ não é um p -fator¹ e assim existe um polinômio irreduzível Q ocorrendo em $\Delta_{\mathcal{F}}$ com $\deg(Q) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Tal fator, define uma hipersuperfície \mathcal{F} -invariante pela Proposição 3.3.11. \square

3.3.2 A p -folheação e sua relação com operador de Cartier

Seja X variedade não singular de dimensão pelo menos três e definida sobre um corpo algebricamente fechado k de característica $p > 0$. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em X . Defina um subfeixe de T_X pela regra

$$\mathcal{CT}(\mathcal{F}) = \{v \in T_X \mid i_v \mathbf{C}(\omega) = 0 \text{ para toda 1-forma racional fechada } \omega \text{ se anulando em } \mathcal{F}\}.$$

Definição 3.3.13. *Seja \mathcal{F} uma folheação não p -fechada de codimensão um em X . A **transformada de Cartier** de \mathcal{F} é a distribuição definida por $\mathcal{CT}(\mathcal{F})$.*

A transformada de Cartier de uma folheação não é necessariamente uma folheação.

Exemplo 3.3.14. *Sejam A_1, A_2 e A_3 polinômios em $k[x, y, z]$ dados por $A_1 = x^p$, $A_2 = y^p$ e $A_3 = y^{p-1} + x^p + z$ e considere a folheação em \mathbb{A}_k^3 definida pela 1-forma*

$$\omega = A_1^p x^{p-1} dx + A_2^p y^{p-1} dy + A_3^p z^{p-1} dz.$$

Então, segue facilmente que ω é uma 1-forma fechada com

$$\mathbf{C}(\omega) = x^p dx + y^p dy + (y^{p-1} + x^p + z) dz.$$

Daí, $d\mathbf{C}(\omega) = -y^{p-2} dy \wedge dz$ o que implica $\mathbf{C}(\omega) \wedge d\mathbf{C}(\omega) = -x^p y^{p-2} dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$.

Proposição 3.3.15. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um e não p -fechada em X . Então, a p -distribuição associada a \mathcal{F} coincide com a saturação de $T_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{TC}(\mathcal{F})$ em T_X .*

Demonstração. Sejam $v \in T_{\mathcal{F}}$ uma seção local e ω uma 1-forma racional fechada se anulando ao longo de \mathcal{F} . Pela fórmula do Teorema 3.2.14 temos que

$$i_v \mathbf{C}(\omega)^p = i_{v^p} \omega - v^{p-1}(i_v \omega) = i_{v^p} \omega.$$

Seja $v \in T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$. Pela definição segue que $v^p \in T_{\mathcal{F}}$ e assim $i_{v^p} \omega = 0$ para qualquer $\omega \in N_{\mathcal{F}}^*$. Em particular, se ω é fechada temos que $i_v \mathbf{C}(\omega) = 0$ o que demonstra que $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} \subset T_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{TC}(\mathcal{F})$. Agora, seja $v \in T_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{TC}(\mathcal{F})$. Pela definição temos que $i_v \mathbf{C}(\omega) = 0$ para qualquer 1-forma racional fechada ω se anulando em \mathcal{F} . Em particular, pela fórmula acima temos que a igualdade $i_v \mathbf{C}(\omega) = 0$ implica que $i_{v^p} \omega = 0$. Assim, $v \in T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$. \square

Corolário 3.3.16. *Seja \mathcal{F} uma folheação não p -fechada de codimensão um em X e suponha que \mathcal{F} admite um fator de integração, isto é, existe uma seção não nula $s \in H^0(X, N_{\mathcal{F}})$ tal que $s^{-1} \cdot \omega$ é uma 1-forma regular fechada. Então, $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ é a folheação que consiste no núcleo da 2-forma*

$$\mathbf{C}(s^{-1} \cdot \omega) \wedge s^{-1} \cdot \omega.$$

¹isto é, não existe um divisor D tal que $pD = \Delta_{\mathcal{F}}$

Exemplo 3.3.17. Sejam $d_1, d_2, \dots, d_r \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $F_0, F_1, \dots, F_r \in k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ polinômios homogêneos com $d_i = \deg(F_i)$. Suponha que F_1, \dots, F_r são irredutíveis e primos entre si. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in k^* - \mathbb{F}_p^*$ tais que $\sum_{i=1}^r \alpha_i d_i = 0$ e considere a 1-forma

$$\Omega = F_1 F_2 \cdots F_{r-1} F_r \sum_{i=1}^r \alpha_i \frac{dF_i}{F_i}.$$

A 1-forma acima define uma folheação \mathcal{F} (folheação logarítmica). Suponha que \mathcal{F} seja não p -fechada.

Note que \mathcal{F} admite um fator de integração. De fato, considere $F = F_1 F_2 \cdots F_{r-1} F_r$. Então, $F \in H^0(\mathbb{P}_k^3, N_{\mathcal{F}})$ é tal que $d(\frac{\Omega}{F}) = 0$. Agora, pelas propriedades do operador de Cartier (ver Proposição 3.2.15) temos que

$$C\left(\frac{\Omega}{F}\right) = C\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \frac{dF_i}{F_i}\right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^{1/p} \frac{dF_i}{F_i}.$$

Daí, segue que

$$C\left(\frac{\Omega}{F}\right) \wedge \frac{\Omega}{F} = \sum_{i < j} (\alpha_j^{1/p} \alpha_i - \alpha_i^{1/p} \alpha_j) \frac{dF_i \wedge dF_j}{F_i F_j}.$$

Assim, pela proposição acima temos que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ é definida pela saturação da 2-forma

$$\sigma = \sum_{i < j} (\alpha_j^{1/p} \alpha_i - \alpha_i^{1/p} \alpha_j) \tilde{F}_{ij} dF_i \wedge dF_j.$$

onde $F_{ij} = \frac{F}{F_i F_j}$. Seja H o divisor de zeros $(\sigma)_0$ da 2-forma σ . Daí, segue que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ é uma folheação de codimensão dois e grau

$$\sum_{i=1}^r d_i - d_1 - d_2 + (d_1 - 1) + (d_2 - 1) - 1 - \deg(H) = D - 3 - \deg(H) = d - (1 + \deg(H))$$

onde $d = \deg(\mathcal{F})$. Pelo Corolário 3.3.10 concluímos que $\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) = d + 2 + p \deg(H)$.

Observação 3.3.18. O menor grau possível para p -divisor de folheações (não p -fechadas) de codimensão um em \mathbb{P}_k^3 e grau $d \geq 1$ é precisamente $d + 2$. De fato, dada uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{P}_k^3 de grau $d \geq 1$ temos pelo Corolário 3.3.10

$$\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) = p(d - d_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} - 1) + d + 2$$

onde $d_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ é o grau da p -distribuição associada a \mathcal{F} . Como $d_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} \geq 0$ temos que $\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) \geq d + 2$.

Proposição 3.3.19. Seja $f: X \rightarrow S$ um mapa racional dominante separável onde S é uma superfície não singular. Suponha que $\dim X = 3$ e seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em X que não é p -fechada. Suponha que \mathcal{F} é um pullback por f , isto é, $\mathcal{F} = f^* \mathcal{H}$ para alguma folheação \mathcal{H} em S . Então, $\mathcal{C}_{\mathcal{F}} = \text{Ker}(df)$.

Demonstração. Seja $\mathcal{G} = \text{Ker}(df)$ a folheação definida pelo mapa racional f . Note inicialmente que o feixe \mathcal{G} é um subfeixe saturado de T_X de posto $r = \dim X - \dim S = 1$. Desse modo, como $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ é saturado de posto $r = 1$ segue que para mostrar o teorema acima é suficiente mostrar que $\mathcal{G} \subset T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$.

Seja $v \in T_X$. Pela definição temos que $v \in \mathcal{G}$ se e somente se para qualquer seção local $g \in \mathcal{O}_S$ temos que $f^* g$ é uma seção local tal que $v(f^* g) = 0$. Agora, dada qualquer derivação

v e $h \in \mathcal{O}_X$ tal que $v(h) = 0$ temos, por iteração, que $v^k(h) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Em particular, vale $v^p(h) = 0$. Isso demonstra que \mathcal{G} é estável por p -potências. Por outro lado, segue da definição que $\mathcal{G} \subset T_{\mathcal{F}}$. Como $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ é a maior subfolheação de \mathcal{F} estável por p -potências temos que $\mathcal{G} \subset T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$. \square

3.4 Componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\text{ol}_{p-2}(\mathbb{P}_k^n)$

Dado um polinômio homogêneo $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ de grau d não é difícil verificar que a 1-forma homogênea $\omega = dF$ não define uma folheação em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. Isso se segue da fórmula de Euler já que $i_R dF = \deg(F)F \neq 0$ de modo que dF não define uma seção global de $\Omega_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n}^1(d)$. Por outro lado, se estamos considerando computações sobre um corpo k de característica $p > 0$ e se $F \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ é homogêneo de grau d então a fórmula de Euler garante que dF define uma folheação quando p divide d . Em particular, resulta a seguinte observação:

Observação 3.4.1. *Sobre um corpo k de característica $p > 0$ existem folheações em \mathbb{P}_k^2 que não admitem nenhuma singularidade. Com efeito, tome $F \in k[x_0, x_1, x_2]_p$ um polinômio homogêneo de grau $p > 0$ tal que $\mathcal{Z}(\frac{\partial F}{\partial x_0}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}) = \emptyset$ e considere a folheação definida pela 1-forma $\omega = dF$.*

Exemplo 3.4.2. *Seja d um inteiro tal que $p \mid d$ e considere C a curva em \mathbb{P}_k^2 descrita pelo polinômio*

$$F = x^{d-1}y + y^{d-1}z + xz^{d-1}.$$

Seja \mathcal{F} a folheação definida por dF . Então, \mathcal{F} é uma folheação de grau $d - 2$ e admite C como uma curva \mathcal{F} -invariante não singular de grau d . Observe ainda que se $d = p = 3$ então \mathcal{F} é uma folheação lisa.

Nesta seção, vamos mostrar que folheações que podem ser definidas por 1-formas do tipo dF com F um polinômio irredutível de grau p formam uma componente irredutível do espaço de folheações de grau $p - 2$.

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e considere o mapa racional δ que é definido da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} \delta: \mathbb{P}_k^{N_p} = \mathbb{P}(\mathbb{H}^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(p))) &\dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{H}^0(\mathbb{P}_k^n, \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(p))) = \mathbb{P}_k^{M_p} \\ [F] &\mapsto [dF]. \end{aligned}$$

Observe que o lugar de indeterminação de δ é o fechado que consiste de todos os polinômios homogêneos de grau p que são p -potências. Seja $U \subset \mathbb{P}_k^{N_p}$ o aberto onde o mapa acima está definido. Vamos abusar a notação e continuar a denotar por δ o mapa restrito a U . Note ainda que a imagem de δ está contida no espaço de folheações em \mathbb{P}_k^n de grau $p - 2$, isto é, em $\mathbb{F}\text{ol}_{p-2}(\mathbb{P}_k^n)$.

Lema 3.4.3. *Seja ω uma 1-forma projetiva fechada em \mathbb{A}_k^{n+1} . Se ω possui coeficientes de grau $p - 1$ então $\omega = dF$.*

Demonstração. Considere a p -decomposição de ω , isto é, escreva ω como

$$\omega = dF + \sum_{i=0}^n u_i x_i^{p-1} dx_i$$

no sistema de coordenadas x_0, \dots, x_n . Pela discussão na Subseção 3.2.2 sabemos que ω admite uma única, módulo k^* , escritura como acima. Segue da homogeneidade de ω que $F \in k[x_0, \dots, x_n]$ é homogêneo de grau p e que $u_i \in k$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Contração de ω com o campo radial R implica

$$0 = i_R\omega = i_RdF + \sum_{i=0}^n u_i x_i^{p-1} i_R dx_i = 0 + \left(\sum_{i=0}^n u_i^{1/p} x_i \right)^p \implies u_i = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Daí, $\omega = dF$ para algum polinômio homogêneo $F \in k[x_0, \dots, x_n]_p$. \square

Proposição 3.4.4. *Se $p > 2$ e $n > 2$ então o fecho de Zariski de $\delta(U)$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\text{ol}_{p-2}(\mathbb{P}_k^n)$.*

Demonstração. Para provar a proposição acima considere o aberto

$$V = \{[\omega] \in \mathbb{F}\text{ol}_{p-2}(\mathbb{P}_k^n) \mid \text{codim}(\text{sing}(\omega)) \geq 3\}.$$

Vamos mostrar que para todo $[F] \in U$ tal que $dF \in V$ temos que o mapa

$$\begin{aligned} d_{[F]}\delta: T_{[F]}\mathbb{P}_k^{N_p} &\longrightarrow T_{[dF]}\mathbb{F}\text{ol}_{p-2}(\mathbb{P}_k^n) \\ [F] + \epsilon[G] &\mapsto [dF] + \epsilon[dG] \end{aligned}$$

é sobrejetivo. Observe que a condição $[F] \in U$ tal que $[dF] \in V$ é não vazia. Com efeito, sejam $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ divisível por p e $c \in k^*$. Considere a hipersuperfície em \mathbb{P}_k^n descrita pelo polinômio

$$F = cx_0^d + x_0^2 x_1^{d-2} + \sum_{i=0}^{n-1} x_i x_{i+1}^{d-1} + x_n^d.$$

Pela [41, Section 3, pag 235] segue que $\mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}_k^n$ define uma hipersuperfície lisa. O argumento em [41, Section 3, Case II, pag 235] mostra ainda que $\text{sing}(dF) = \{[-1/2 : 1 : 0 : \dots : 0], [1 : 0 : \dots : 0]\}$ de modo que $\text{codim}(\text{sing}(dF)) \geq 3$.

Agora, seja $\sigma \in T_{[dF]}\mathbb{F}\text{ol}_{p-2}(\mathbb{P}_k^n)$ de modo que podemos escrever $\sigma = dF + \epsilon\omega$. A condição de integrabilidade $\sigma \wedge d\sigma = 0$ implica que $dF \wedge d\omega = 0$. O Lema de de Rham generalizado em [34, Proposition 2.1] implica que $d\omega = \alpha \wedge dF$ para alguma 1-forma projetiva α de grau e . Como $d\omega$ é uma 2-forma com coeficientes tendo grau $p-2$ e dF tem grau $p-1$ nos coeficientes resulta que $\alpha = 0$. Logo, $d\omega = 0$. Usando o lema anterior segue que $\sigma = dG$ para algum $G \in k[x_0, \dots, x_n]_p$, o que demonstra a sobrejetividade. \square

Capítulo 4

Folheações p -fechadas de dimensão um em \mathbb{P}_k^n

Resumo. Neste capítulo estudamos as folheações p -fechadas em \mathbb{P}_k^n ($n \geq 2$) que são de dimensão um e grau $d \geq 0$. Apresentamos todas as componentes irredutíveis de tal espaço quando $d = 1$ e mostramos que o número de tais componentes é da ordem p^n . Usamos tal resultado para estudar as folheações em \mathbb{P}_k^3 que são pullbacks de folheações em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ por aplicações racionais de grau um.

4.1 Introdução

A **Conjectura F** formulada por T. Ekedahl, N. Shepherd-Barron e R. Taylor no artigo **A conjecture on the existence of compact leaves of algebraic foliations** ([16, Conjecture F]) prediz em particular que uma folheação \mathcal{F} de posto $r \geq 1$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ ($n \geq 2$) possui todas as folhas algébricas se e somente se a sua redução módulo p é p -fechada para quase todo primo na álgebra de definição de \mathcal{F} . Como mencionado na introdução, a algebricidade das folhas de uma tal folheação é algo de natureza rara mesmo para $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Nesse sentido, tal conjectura sugere que se fixarmos um corpo algebricamente fechado k de característica $p > 0$ e consideramos o espaço de folheações p -fechadas de codimensão $q \geq 1$ e grau $d \geq 0$ em \mathbb{P}_k^n então a geometria de tal espaço deve ser complicada.

Nesse capítulo vamos considerar o caso em que $n \geq 2$, $q = n - 1$ e $d = 1$. Vamos mostrar, em particular, que o número de componentes irredutíveis do espaço de folheações p -fechadas de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n é da ordem p^n onde p é a característica do corpo base k .

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e denote por $\mathbb{F}\text{ol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$ o espaço parametrizando as folheações de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n ($n \geq 2$) que são p -fechadas. Para cada $[\alpha_0 : \dots : \alpha_n] \in \mathbb{P}_k^n$ denote por $\mathcal{F}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ a folheação de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n determinada pelo campo

$$v(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \alpha_0 x_0 \partial_{x_0} + \alpha_1 x_1 \partial_{x_1} + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} \partial_{x_{n-1}} + \alpha_n x_n \partial_{x_n}$$

e considere a seguinte subvariedade de $\mathbb{F}\text{ol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$:

$$V(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \overline{\{\mathcal{F} \in \mathbb{F}\text{ol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0) \mid \mathcal{F} \text{ é conjugada via } \text{Aut}(\mathbb{P}_k^n) \text{ a } \mathcal{F}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)\}}$$

onde a barra significa o fecho de Zariski.

Teorema A. *Suponha que p não divide $n + 1$. Se $[\alpha_0 : \dots : \alpha_n] \in \mathbb{P}_k^n(\mathbb{F}_p)$ e $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 0$ então $V(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$. Além disso, toda componente irredutível de tal espaço é dessa forma.*

Para a demonstração do teorema acima o primeiro passo consiste em identificar o espaço de folheações p -fechadas de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n como uma subvariedade do espaço das matrizes quadradas de tamanho $n + 1$ que possuem traço zero. Feita tal identificação o resultado seguirá de um resultado sobre matrizes. Mais precisamente, denote por $\text{Tr}_0(0; n+1)$ ($n \geq 2$) a projetivização do espaço das matrizes quadradas de tamanho $n + 1$ que são p -fechadas e possuem traço nulo. Para cada $[\alpha_0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_{n-1} : \alpha_n] \in \mathbb{P}_k^n$ denote por $D(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ a matriz diagonal

$$D(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

e considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{O}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \overline{\{[gD(\alpha_0, \dots, \alpha_n)g^{-1}] \in \text{Tr}_0(0; n+1) \mid g \in \text{Gl}_{n+1}(k)\}} \subset \text{Tr}_0(0; n+1)$$

onde a barra significa o fecho de Zariski em $\text{Tr}_0(0; n+1)$.

O Teorema A será consequência do seguinte teorema.

Teorema 4.1.1. *Se $[\alpha_0 : \dots : \alpha_n] \in \mathbb{P}_k^n(\mathbb{F}_p)$ e $\sum_i \alpha_i = 0$ então $\mathcal{O}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ é uma componente irredutível de $\text{Tr}_0(0; n+1)$. Além disso, toda componente irredutível de tal espaço é dessa forma.*

Como consequência do Teorema A obteremos uma aplicação ao estudo de deformações de folheações em \mathbb{P}_k^3 que são pullbacks de folheações em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ por aplicações racionais de grau um.

Corolário 4.1.2. *Seja \mathcal{C} uma folheação de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^3 . Suponha que \mathcal{C} seja p -fechada e seja $\{\mathcal{C}_t\}_{t \in T}$ uma família de folheações p -fechadas com $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ para algum ponto fechado $0 \in T$. Se \mathcal{C} é definida pela mapa racional*

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{P}_k^3 &\dashrightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1 \\ [x_0 : x_1 : y_0 : y_1] &\mapsto ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \end{aligned}$$

então existe um aberto U sobre 0 tal que para todo $t \in U$ temos que \mathcal{C}_t é definida por um mapa racional $\Phi_t: \mathbb{P}_k^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ de grau um com $\Phi_0 = \Phi$.

Para a demonstração do Teorema 4.1.1 vamos considerar inicialmente uma decomposição do espaço de matrizes quadradas de tamanho $n + 1$ que são p -fechadas com traço nulo e não nilpotentes, isto é, $\text{Tr}_0(0; n+1) - \{[A] \in \text{Tr}_0(0; n+1) \mid A^n = 0\}$. O próximo passo, consiste em mostrar que tal decomposição determina uma decomposição do espaço $\text{Tr}_0(0, n+1)$, por passagem ao fecho de Zariski. O Teorema A será consequência de certas identificações e construções que serão explicitadas nas primeiras seções desse capítulo.

4.2 Folheações de dimensão um e grau $d \geq 0$ em \mathbb{P}_k^n

Nesta seção estudamos as folheações de dimensão um e grau $d \geq 0$ em \mathbb{P}_k^n . Mostramos, sob certas condições, que dada uma tal folheação em \mathbb{P}_k^n podemos associar naturalmente um campo homogêneo em \mathbb{A}_k^{n+1} com divergente nulo e vice versa. O conteúdo dessa seção é similar ao conteúdo em [27, Proposition 1.4].

No que se segue adotaremos a seguinte notação.

- $\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1})$ = campos homogêneos de grau $d \geq 0$ em \mathbb{A}_k^{n+1} . Um elemento $v \in \mathfrak{X}(\mathbb{A}_k^{n+1})$ se escreve como $v = \sum_{i=0}^n A_i \partial_{x_i}$ com $A_i \in k[x_0, \dots, x_n]$ polinômio homogêneo de grau d para todo i .
- $\mathbb{F}\text{or}(j, d; n+1)$ = projetivização do k -espaço vetorial das j -formas homogêneas em \mathbb{A}_k^{n+1} de grau d nos coeficientes.
- $\mathbb{F}\text{or}_0(j, d; n+1)$ = fechado em $\mathbb{F}\text{or}(j, d; n+1)$ que consiste nas j -formas homogêneas de grau d em \mathbb{A}_k^{n+1} que são projetivas, isto é, $i_R \sigma = 0$ para todo $[\sigma] \in \mathbb{F}\text{or}_0(j, d; n+1)$ onde R é o campo radial $R = \sum_{i=0}^n x_i \partial_{x_i}$.

Relembramos a seguinte proposição.

Proposição 4.2.1. (*Fórmula de Euler*) *Seja ω uma q -forma homogênea em \mathbb{A}_k^{n+1} com coeficientes tendo grau d . Então,*

$$i_R d\omega + di_R \omega = (q + d)\omega.$$

Em particular, se $[\omega] \in \mathbb{F}\text{or}_0(q, d, n+1)$ então

$$i_R d\omega = (q + d)\omega.$$

Demonstração. Isso é o conteúdo de [27, Lemme 1.2]. □

Seja $\mathbb{X}(d; n+1)$ a subvariedade de $\mathbb{F}\text{or}(n, d; n+1)$ definida pondo

$$\mathbb{X}(d; n+1) = \{[\sigma] \in \mathbb{F}\text{or}(n, d; n+1) \mid d\sigma = 0\}.$$

Observe que o operador diferenciação define uma aplicação.

$$\begin{aligned} D: \mathbb{F}\text{or}_0(n-1, d+1; n+1) &\longrightarrow \mathbb{X}(d; n+1) \subset \mathbb{F}\text{or}(n, d; n+1) \\ [\sigma] &\mapsto [d\sigma]. \end{aligned}$$

Observe que quando $p \nmid d+n$ temos que D está bem definida e induz um morfismo entre variedades. Por outro lado, quando $p \mid d+n$ a aplicação acima é, a princípio, apenas racional.

Proposição 4.2.2. *Suponha que $p \nmid d+n$. Então, o mapa D é um isomorfismo de variedades.*

Demonstração. Isto se segue da fórmula de Euler. De fato, defina o mapa integração pondo:

$$\begin{aligned} I: \mathbb{X}(d; n+1) &\longrightarrow \mathbb{F}\text{or}_0(n-1, d+1; n+1) \\ [\sigma] &\mapsto [i_R \sigma]. \end{aligned}$$

Sejam σ e ω duas formas homogêneas em \mathbb{A}_k^{n+1} de tipo n e $n-1$ respectivamente. Suponha que σ (resp. ω) tem grau d (resp. $d+1$) nos coeficientes. Pela fórmula de Euler temos que $i_R d\sigma + di_R \sigma = (d+n)\sigma$ e $i_R d\omega + di_R \omega = (d+n)\omega$. Se $[\sigma] \in \mathbb{X}(d; n+1) \subset \mathbb{F}\text{or}(n, d; n+1)$ então temos $d\sigma = 0$ e daí $(d+n)\sigma = di_R \sigma$. Como $p \nmid (d+n)$ temos que $[\sigma] = [di_R \sigma]$. Em particular, $D(I([\sigma])) = [\sigma]$. Agora, se $[\omega] \in \mathbb{F}\text{or}_0(n-1, d+1; n+1)$ temos que $i_R \omega = 0$ e daí $(d+n)\omega = i_R d\omega$. Daí resulta $[i_R d\omega] = [\omega]$. Em particular, $D(I([\omega])) = [\omega]$. Isso mostra que D é um isomorfismo com inversa dada por I . \square

Seja $\sigma \in \mathbb{F}\text{or}(n, e; n+1)$ uma n -forma homogênea em \mathbb{A}_k^{n+1} de grau $e \geq 0$. Escreva

$$\sigma = \sum_{i=0}^n A_i dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge \hat{d}x_i \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Então, uma simples computação mostra que

$$d\sigma = 0 \iff \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0.$$

Dado um campo homogêneo $v = \sum_{i=0}^n A_i \partial_{x_i}$ de grau d em \mathbb{A}_k^{n+1} relembre que o seu divergente consiste no polinômio

$$\text{div}(v) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \in k[x_0, \dots, x_n]_{d-1}.$$

Definição 4.2.3. *Seja $\sigma \in \mathbb{F}\text{or}(n-1, d+1; n+1)$ uma $n-1$ -forma homogênea em \mathbb{A}_k^{n+1} de grau $d+1$ nos coeficientes. Escreva*

$$d\sigma = \sum_{i=0}^n A_i dx_0 \wedge \cdots \wedge \hat{d}x_i \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

O campo homogêneo de grau d com divergente nulo associado a σ é definido pondo $v_\sigma = \sum_{j=0}^n (-1)^j A_j \partial_{x_j}$.

Proposição 4.2.4. *Seja $\mathbb{V}ec_d(\mathbb{A}_k^{n+1}) \subset \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1}))$ o fechado definido pondo*

$$\mathbb{V}ec_d(\mathbb{A}_k^{n+1}) = \{[v] \in \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1})) \mid \text{div}(v) = 0\}.$$

Suponha que $p \nmid d+n$. Então, os mapas

$$D: \mathbb{F}\text{or}_0(n-1, d+1; n+1) \longrightarrow \mathbb{X}(d; n+1) \quad \psi_2: \mathbb{X}(d; n+1) \longrightarrow \mathbb{V}ec_d(\mathbb{A}_k^{n+1})$$

$$[\sigma] \mapsto [d\sigma], \quad [\omega] \mapsto [v_{i_R \omega}],$$

$$\psi_3: \mathbb{F}\text{or}(n-1, d+1; n+1) \longrightarrow \mathbb{V}ec_d(\mathbb{A}_k^{n+1})$$

$$[\omega] \mapsto [v_\omega],$$

são isomorfismo de variedades.

Demonstração. Como $\psi_3 = \psi_2 \circ D$ e como foi demonstrado na Proposição 4.2.2 que D é um isomorfismo segue que para provar a proposição é suficiente provar que ψ_2 é um isomorfismo.

Para isso, considere o mapa

$$\begin{aligned}\gamma_2: \text{Vec}_d(\mathbb{A}_k^{n+1}) &\longrightarrow \mathbb{X}(d; n+1) \\ \sum_{j=0}^n A_j \partial_j &\mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i A_i dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge \hat{dx}_i \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.\end{aligned}$$

Então, não é difícil verificar que γ_2 é a inversa de ψ_2 . \square

Denotaremos por $\text{Fol}_{d,1}(\mathbb{P}_k^n)$ a variedade que parametriza as folheações de dimensão um e grau $d \geq 0$ em \mathbb{P}_k^n . Um elemento da variedade se identifica naturalmente como uma $n-1$ -forma homogênea projetiva em \mathbb{A}_k^{n+1} de grau $d+1$ nos coeficientes, isto é, elementos de $\text{For}_0(n-1, d+1; n+1)$. Observe que não estamos impondo condições no conjunto singular.

Proposição 4.2.5. *Seja $\text{Fol}_{d,1}(\mathbb{P}_k^n)$ o espaço parametrizando as folheações de dimensão um e de grau $d \geq 0$ em \mathbb{P}_k^n . Suponha que $p \nmid d+n$ e denote por $\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1})$ o k -espaço que consiste de campos homogêneos de grau d em \mathbb{A}_k^{n+1} . Seja $\mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1}))$ sua projetivização e considere o conjunto de todos os campos homogêneos de grau d em \mathbb{A}_k^{n+1} que tem divergente zero:*

$$\text{Vec}_d(\mathbb{A}_k^{n+1}) = \{[v] \in \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1})) \mid \text{div}(v) = 0\} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1})).$$

Então, o mapa natural

$$\begin{aligned}\gamma: \text{Fol}_{d,1}(\mathbb{P}_k^n) &\longrightarrow \text{Vec}_d(\mathbb{A}_k^{n+1}) \\ \mathcal{G} &\mapsto [v_{\mathcal{G}}]\end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Segue da Proposição 4.2.4. \square

Exemplo 4.2.6. *Fixe x_0, x_1, y_0, y_1 como as funções coordenadas de \mathbb{P}_k^3 e seja \mathcal{G} uma folheação de dimensão um e grau $d \geq 0$ em \mathbb{P}_k^3 . Suponha que \mathcal{G} está definida por uma 1-forma projetiva*

$$\sigma = Adx_0 \wedge dx_1 + Bdx_0 \wedge dy_0 + Cdx_0 \wedge dy_1 + Ddx_1 \wedge dy_0 + Edx_1 \wedge dy_1 + Fdy_0 \wedge dy_1 \in \text{For}_0(2, d+1, 4)$$

e escreva

$$d\sigma = A_0 dx_0 \wedge dx_1 \wedge dy_0 + A_1 dx_0 \wedge dx_1 \wedge dy_1 + A_2 dx_0 \wedge dy_0 \wedge dy_1 + A_3 dx_1 \wedge dy_0 \wedge dy_1.$$

Então, temos que

$$\begin{aligned}A_0 &= \frac{\partial A}{\partial y_0} - \frac{\partial B}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial x_0} & A_1 &= \frac{\partial A}{\partial y_1} - \frac{\partial C}{\partial x_1} + \frac{\partial E}{\partial x_0}, \\ A_2 &= \frac{\partial B}{\partial y_1} - \frac{\partial C}{\partial y_0} + \frac{\partial F}{\partial x_0} & A_3 &= \frac{\partial D}{\partial y_1} - \frac{\partial E}{\partial y_0} + \frac{\partial F}{\partial x_1}.\end{aligned}$$

e o campo homogêneo de grau d e com divergente nulo associado a \mathcal{G} é, módulo k^* , o campo homogêneo associado a σ dado por

$$v_{\mathcal{G}} = A_3 \partial_{x_0} - A_2 \partial_{x_1} + A_1 \partial_{y_0} - A_0 \partial_{y_1}.$$

4.3 Matrizes p -fechadas

Denotaremos por $M_{n+1}(k)$ o k -espaço vetorial que consiste das matrizes quadradas de tamanho $n+1$ com $n \geq 2$ e por $\mathbb{M}_{n+1}(k)$ sua projetivização. Relembre que $\text{Fol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)$ denota a variedade parametrizando as folheações de dimensão um e grau $d=1$ em \mathbb{P}_k^n . Tal variedade se identifica naturalmente com a projetivização do k -espaço das $n-1$ -formas homogêneas projetivas em \mathbb{A}_k^{n+1} de grau dois nos coeficientes, isto é, $\text{For}_0(n-1, 2; n+1)$.

Definição 4.3.1. *Seja $A \in M_{n+1}(k)$. Dizemos que A é p -fechada se existe $\alpha \in k$ tal que $A^p = \alpha \cdot A$.*

Proposição 4.3.2. *Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$. Se $A \in M_{n+1}(k)$ é p -fechada e não nilpotente então A é diagonalizável.*

Demonstração. Como A é p -fechada e não nilpotente sabemos que existe $\alpha \in k^*$ tal que $A^p = \alpha \cdot A$. Em particular, se considerarmos o polinômio $p(T) = T^p - \alpha T \in k[T]$ temos que $p(A) = 0$. Em particular, o polinômio minimal de A divide $p(T)$. Agora, como $p'(T) = -\alpha \neq 0$ temos que $p(T)$ possui todas as raízes distintas. Em particular, segue que o polinômio minimal de A possui todas as raízes distintas. Logo, A é diagonalizável. \square

Observação 4.3.3. *Seja $A \in M_{n+1}(k)$ uma matriz quadrada de tamanho $n+1$. Se A é p -fechada então qualquer matriz B conjugada a A também é p -fechada. De fato, se $A^p = \alpha \cdot A$ e $g \in \text{Gl}_{n+1}(k)$ é tal que $A = gBg^{-1}$ então $\alpha \cdot gBg^{-1} = \alpha \cdot A = A^p = (gBg^{-1})^p = (gBg^{-1})(gBg^{-1}) \cdots (gBg^{-1})(gBg^{-1}) = gB^p g^{-1}$ e daí segue que $B^p = \alpha \cdot B$.*

Exemplo 4.3.4. *Sejam $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ e $\alpha_3 \in k^*$. Considere*

$$D(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

a matriz diagonal associada. Então, $D(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in M_4(k)$ é p -fechada se e somente se para quaisquer i, j temos que $\alpha_i/\alpha_j \in \mathbb{F}_p$.

Seja $\text{Tr}(0; n+1)$ a subvariedade de $\mathbb{M}_{n+1}(k)$ definida explicitamente por

$$\text{Tr}(0; n+1) = \{[A] \in \mathbb{M}_{n+1}(k) \mid \text{tr}(A) = 0\}$$

e denote por $\text{Tr}_0(0; n+1)$ a subconjunto de $\text{Tr}(0; n+1)$ dado pelas matrizes p -fechadas. Explicitamente,

$$\text{Tr}_0(0; n+1) = \{[A] \in \mathbb{M}_{n+1}(k) \mid \text{tr}(A) = 0 \text{ e } A \text{ é } p\text{-fechada}\}.$$

Proposição 4.3.5. *Os conjuntos $\text{Tr}(0; n+1)$ e $\text{Tr}_0(0; n+1)$ são fechados em $\mathbb{M}_{n+1}(k)$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que a condição de uma matriz $[A] \in \mathbb{M}_{n+1}(k)$ ser p -fechada é uma relação fechada em $\mathbb{M}_{n+1}(k)$. Seja $[A] \in \mathbb{M}_{n+1}(k)$ uma matriz p -fechada. Então, existe $\alpha \in k$ tal que $A^p = \alpha \cdot A$. Se $[A] = [(a_{ij})]$ e $[A^p] = [(a_{ij}^{(p)})]$ então a condição $A^p = \alpha \cdot A$ pode ser reescrita como

$$a_{ij}^{(p)} a_{uv} = a_{uv}^{(p)} a_{ij} \quad \text{para quaisquer } i, j, u \text{ e } v$$

que são relações fechadas nos coeficientes de A já que $a_{ij}^{(p)}$ é um polinômio homogêneo nos coeficientes de A . Isso encerra a demonstração da proposição. \square

4.4 Matrizes com traço nulo e $\mathbb{F}ol_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)$

Seja \mathcal{G} uma folheação de dimensão um e grau um em $\mathbb{P}_k^n (n \geq 2)$. Pela Proposição 4.2.5 sabemos que existe um campo, $v_{\mathcal{G}}$, homogêneo de grau um com $\text{div}(v) = 0$ definindo \mathcal{G} . Temos ainda que $v_{\mathcal{G}}$ é único a menos de multiplicação por elementos de k^* . Escreva

$$v_{\mathcal{G}} = \sum_{i=0}^n a_{i0} x_i \partial_{x_0} + \sum_{i=0}^n a_{i1} x_i \partial_{x_1} + \cdots + \sum_{i=0}^n a_{in-1} x_i \partial_{x_{n-1}} + \sum_{i=0}^n a_{in} x_i \partial_{x_n}$$

e seja $A_{\mathcal{G}}$ a matriz cuja a l -ésima coluna é formada por $v(x_l) = \sum_{i=0}^n a_{il} x_i$. Mais precisamente,

$$A_{\mathcal{G}} = (v(x_0)|v(x_1)|\cdots|v(x_{n-1})|v(x_n)) = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdot & \cdot & a_{0n-1} & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \cdot & \cdot & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, diremos que $A_{\mathcal{G}}$ é a matriz de traço zero associada a folheação \mathcal{G} . Observe que $A_{\mathcal{G}}$ é única módulo k^* e que $0 = \text{div}(v_{\mathcal{G}}) = a_{00} + a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{n-1n-1} + a_{nn} = \text{tr}(A_{\mathcal{G}}) = 0$. Defina o mapa

$$\psi: \mathbb{F}ol_{1,1}(\mathbb{P}_k^n) \longrightarrow \text{Tr}(0; n+1) \quad [v_{\mathcal{G}}] \mapsto [A_{\mathcal{G}}].$$

A Proposição 4.2.4 pode ser reformulada na seguinte forma.

Proposição 4.4.1. *O mapa*

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{F}ol_{1,1}(\mathbb{P}_k^n) &\longrightarrow \text{Tr}(0; n+1) \\ [v_{\mathcal{G}}] &\mapsto [A_{\mathcal{G}}] \end{aligned}$$

é um isomorfismo de variedades se p não divide $n+1$.

A seguinte proposição estabelece a relação entre folheações de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n que são p -fechadas e as matrizes quadradas de tamanho $n+1$ que são p -fechadas.

Proposição 4.4.2. *Seja \mathcal{G} uma folheação de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n e seja $v_{\mathcal{G}}$ o único, módulo k^* , campo homogêneo de grau $d = 1$ com divergente nulo que define \mathcal{G} . Seja $v_{\mathcal{G}}^p$ o campo definido pondo*

$$v_{\mathcal{G}}^p = v_{\mathcal{G}}^p(x_0) \partial_{x_0} + v_{\mathcal{G}}^p(x_1) \partial_{x_1} + \cdots + v_{\mathcal{G}}^p(x_{n-1}) \partial_{x_{n-1}} + v_{\mathcal{G}}^p(x_n) \partial_{x_n}$$

e suponha que $v_{\mathcal{G}}^p \neq 0$. Então, $v_{\mathcal{G}}^p$ representa uma folheação e $\psi([v_{\mathcal{G}}^p]) = \psi([v_{\mathcal{G}}])^p$.

Demonstração. Note que $v_{\mathcal{G}}^p$ define uma folheação. De fato, como em característica $p > 0$ vale $\text{tr}(A^p) = \text{tr}(A)^p$ temos que $\text{div}(v^p) = \text{div}(v)^p = 0$. Assim $v_{\mathcal{G}}^p$ define uma folheação de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n , isto é, um elemento de $\text{Tr}(0; n+1)$. Agora, seja $A_{v_{\mathcal{G}}^p}$ a matriz que representa o campo homogêneo

$$v_{\mathcal{G}}^2 = v_{\mathcal{G}}^2(x_0) \partial_{x_0} + v_{\mathcal{G}}^2(x_1) \partial_{x_1} + \cdots + v_{\mathcal{G}}^2(x_{n-1}) \partial_{x_{n-1}} + v_{\mathcal{G}}^2(x_n) \partial_{x_n}.$$

Para demonstrar que ψ preserva p -potências é suficiente mostrar que $A_{v_{\mathcal{G}}^2} = A_{v_{\mathcal{G}}}^2$. Temos que $A_{v_{\mathcal{G}}}^2 = (b_{ij})$ com $b_{ij} = \sum_k a_{ik}a_{kj}$. Por outro lado, fixado $i \in \{0, 1, \dots, n-1, n\}$, temos que

$$v_{\mathcal{G}}^2(x_i) = v(v(x_i)) = v\left(\sum_j a_{ji}x_j\right) = \sum_j a_{ji}v(x_j) = \sum_{j,p} a_{ji}a_{ip}x_p.$$

Assim, $A_{v_{\mathcal{G}}^2} = (c_{ij})$ com $c_{ij} = \sum_k a_{kj}a_{ik} = \sum_k a_{ik}a_{kj} = b_{ij}$ de modo que obtemos $A_{v_{\mathcal{G}}^2} = A_{v_{\mathcal{G}}}^2$. Considerando p -iterações concluímos que vale a fórmula: $A_{v_{\mathcal{G}}^p} = A_{v_{\mathcal{G}}}^p$. \square

Observação 4.4.3. *Sejam \mathcal{G} uma folheação de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n ($n \geq 2$) e $v_{\mathcal{G}}$ um campo homogêneo de grau um e com divergente nulo associado a \mathcal{G} . Seja $A = (a_{ij}) \in M_{n+1}(k)$ uma matriz com traço nulo definida sobre o corpo k e considere o campo homogêneo de grau um definido por A . Mais precisamente,*

$$v_A = \sum_{i=0}^n a_{i0}x_i\partial_{x_0} + \sum_{i=0}^n a_{i1}x_i\partial_{x_1} + \dots + \sum_{i=0}^n a_{in-1}x_i\partial_{x_{n-1}} + \sum_{i=0}^n a_{in}x_i\partial_{x_n}.$$

Então, v_A define uma folheação \mathcal{A} de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n e o campo

$$v = v_{\mathcal{G}}(v_A(x_0))\partial_{x_0} + v_{\mathcal{G}}(v_A(x_1))\partial_{x_1} + \dots + v_{\mathcal{G}}(v_A(x_{n-1}))\partial_{x_{n-1}} + v_{\mathcal{G}}(v_A(x_n))\partial_{x_n}$$

determina uma folheação de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n com matriz associada dada por $[A_v] = [A_{\mathcal{G}} \cdot A] \in \text{Tr}(0; n+1)$.

Proposição 4.4.4. *Seja \mathcal{G} uma folheação de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n e seja $v_{\mathcal{G}}$ o único, módulo k^* , campo homogêneo de grau $d = 1$ com divergente nulo associado a \mathcal{G} . Suponha que a característica p de k não divide $n+1$. Então, \mathcal{G} é p -fechada se e somente se $v_{\mathcal{G}}^p = \alpha \cdot v_{\mathcal{G}}$ para alguma constante $\alpha \in k$.*

Demonstração. Suponha que \mathcal{G} seja p -fechada e $v_{\mathcal{G}}^p \neq 0$. Então, $v_{\mathcal{G}}^p$ é um campo homogêneo de grau um definido \mathcal{G} . Como qualquer outro campo definido \mathcal{G} difere por um múltiplo do campo radial $R = \sum_i x_i\partial_{x_i}$, temos que $v_{\mathcal{G}}^p = \alpha_1 \cdot v_{\mathcal{G}} + \alpha_2 \cdot R$ para algumas constantes $\alpha_1, \alpha_2 \in k$. Agora, note que como $\text{div}(v_{\mathcal{G}}^p) = \text{div}(v_{\mathcal{G}})^p = 0$ temos que $0 = \text{div}(v_{\mathcal{G}}^p) = \alpha_1 \text{div}(v_{\mathcal{G}}) + \alpha_2 \text{div}(R) = \alpha_2 \cdot (n+1)$ e daí $\alpha_2 = 0$. Logo, $v_{\mathcal{G}}^p = \alpha_1 \cdot v_{\mathcal{G}}$. \square

Exemplo 4.4.5. *Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 2$ e considere o mapa racional*

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{P}_k^3 &\dashrightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1 \\ [x_0 : x_1 : y_0 : y_1] &\mapsto ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]). \end{aligned}$$

Seja \mathcal{G} a folheação definida pelo mapa acima. Concretamente a folheação \mathcal{G} é definida pela 2-forma projetiva

$$\sigma = i_R(dx_0 \wedge dx_1) \wedge i_R(dy_0 \wedge dy_1) = x_1y_1dx_0 \wedge dy_0 - x_1y_0dx_0 \wedge dy_1 - x_0y_1dx_1 \wedge dy_0 + x_0y_0dx_1 \wedge dy_1.$$

Usando a Proposição 4.2.5 segue que um campo com divergente nulo que define \mathcal{G} é dado por

$$v_{\mathcal{G}} = 2x_0\partial_{x_0} + 2x_1\partial_{x_1} - 2y_0\partial_{y_0} - 2y_1\partial_{y_1}.$$

Por conseguinte a matriz associada a folheação \mathcal{G} é dada por

$$A_{v\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \pmod{k^*}.$$

4.5 Componentes irredutíveis de $\mathbb{T}r_0(0; n+1)$

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e denote por $\mathbb{T}r_0(0; n+1)$ ($n \geq 2$) o espaço parametrizando as matrizes quadradas de tamanho $n+1$ que são p -fechadas e possuem traço nulo. Para cada $[\alpha_0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_{n-1} : \alpha_n] \in \mathbb{P}_k^n$ denote por $D(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ a matriz diagonal

$$D(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

e considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{O}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \overline{\{[gD(\alpha_0, \dots, \alpha_n)g^{-1}] \in \mathbb{T}r_0(0; n+1) \mid g \in Gl_{n+1}(k)\}} \subset \mathbb{T}r_0(0; n+1)$$

onde a barra significa o fecho de Zariski em $\mathbb{T}r_0(0; n+1)$.

Nesta seção visamos estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 4.5.1. *Se $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{P}_k^n(\mathbb{F}_p)$ e $\sum_i \alpha_i = 0$ então $\mathcal{O}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ é uma componente irredutível de $\mathbb{T}r_0(0; n+1)$. Além disso, toda componente irredutível de tal espaço é dessa forma.*

Observe que os conjuntos $\mathcal{O}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ são fechados irredutíveis em $\mathbb{T}r_0(0; n+1)$. De fato, $\mathcal{O}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ pode ser visto como o fecho de Zariski da imagem do morfismo:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_n): \text{PGL}_{n+1}(k) &\longrightarrow \mathbb{T}r_0(0; n+1) \\ [g] &\mapsto [gD(\alpha_0, \dots, \alpha_n)g^{-1}]. \end{aligned}$$

Observação 4.5.2. *A coleção de \mathbb{F}_p -pontos de \mathbb{P}_k^n satisfazendo $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ se corresponde ao conjunto de \mathbb{F}_p -pontos na hipersuperfície em \mathbb{P}_k^n descrita pelo polinômio $f = x_0 + \dots + x_n$. Como $\mathcal{Z}(f) \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$ temos precisamente $p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p + 1$ tuplas com tal propriedade.*

Passemos agora a demonstração do Teorema 4.1.1.

Demonstração. Denote por \mathbf{Nil} o subconjunto fechado de $\mathbb{T}r_0(0; n+1)$ formado pelas matrizes nilpotentes, isto é

$$\mathbf{Nil} = \{[A] \in \mathbb{T}r_0(0; n+1) \mid A^{n+1} = 0\}.$$

Seja H a hipersuperfície em \mathbb{P}_k^n descrita pelo polinômio $f = x_0 + \dots + x_n$. Dado $[\alpha_0 : \dots : \alpha_n] \in H(\mathbb{F}_p)$ um \mathbb{F}_p -ponto denote por $O(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ o seguinte conjunto

$$O(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \{[gD(\alpha_0, \dots, \alpha_n)g^{-1}] \in \mathrm{Tr}_0(0; n+1) \mid g \in \mathrm{Gl}_{n+1}(k)\}.$$

Note que $\mathcal{O}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ é o fecho de Zariski de $O(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ em $\mathrm{Tr}_0(0; n+1)$.

Seja U o conjunto aberto $\mathrm{Tr}_0(0; n+1) - \mathbf{Nil}$. Note que pela Proposição 4.3.2 temos que U consiste nos elementos de $\mathrm{Tr}_0(0; n+1)$ que são diagonalizáveis. Desse modo, podemos reescrever U como uma união:

$$U = \bigcup_{[\alpha_0, \dots, \alpha_n] \in H(\mathbb{F}_p)} O(\alpha_0, \dots, \alpha_n).$$

Agora, note que para qualquer permutação π do conjunto $\{0, \dots, n\}$ temos que as matrizes $D(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ e $D(\alpha_{\pi(0)}, \dots, \alpha_{\pi(n)})$ são conjugadas. Desse modo, vale a igualdade $O(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = O(\alpha_{\pi(0)}, \dots, \alpha_{\pi(n)})$. Assim, removendo as redundâncias podemos reescrever

$$U = \bigcup_{[\alpha_0 : \dots : \alpha_n] \in I} O(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$$

como uma união disjunta de conjuntos da forma $O(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ para algum subconjunto I do conjunto de \mathbb{F}_p -pontos da hipersuperfície $H = \{\sum_i x_i = 0\}$. A decomposição de U implica que $\mathrm{Tr}_0(0; n+1)$ admite uma decomposição

$$\mathrm{Tr}_0(0; n+1) = \bigcup_{[\alpha_0 : \dots : \alpha_n] \in I} O(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \cup \mathbf{Nil}.$$

Afirmção: Dado $[N] \in \mathbf{Nil}$ temos que $N \in O(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ para todo $[\alpha_0 : \dots : \alpha_n] \in H(\mathbb{F}_p)$ com $\alpha_j \neq \alpha_i$ se $i \neq j$. De fato, considere o morfismo de variedades:

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{P}_k^1 &\longrightarrow \mathrm{Tr}(0; n+1) \\ [t : s] &\mapsto [tN + sD(\alpha_0, \dots, \alpha_n)] \end{aligned}$$

e observe que $\psi([0 : 1]) = [D(\alpha_0, \dots, \alpha_n)] \in O(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ e $\psi([1 : 0]) = N$. Para mostrar que $N \in O(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ vamos mostrar que $\psi([t : s]) \in O(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ para todo $[t : s] \in \mathbb{P}_k^1 - \{[0 : 1], [1 : 0]\}$. Como veremos mais adiante isso será suficiente para mostrarmos que $N \in O(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$. Observe inicialmente que como os conjuntos $O(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ são estáveis por conjugação podemos supor que N é uma matriz triangular superior com diagonal nula. De fato, aqui usamos o fato que toda matriz nilpotente é conjugada a uma matriz triangular superior com diagonal nula.

Seja $[t : s] \in \mathbb{P}_k^1 - \{[0 : 1], [1 : 0]\}$ e considere a matriz $N(t : s) = tN + sD(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$. Como N é triangular superior com diagonal nula e como $\alpha_i \neq \alpha_j$ ($i \neq j$) temos que o polinômio minimal de $N(t : s)$ coincide com o polinômio minimal de $D(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$, isto é, o polinômio minimal de $N(t : s)$ é da forma $m(T) = \prod_{i=0}^n (T - \alpha_i)$. Isso implica em particular que $N(t : s)$ é diagonalizável, já que $m(T)$ é reduzido. Assim, $N(t : s) \in O(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ o que demonstra a inclusão:

$$\psi(\mathbb{P}_k^1 - \{[1 : 0]\}) \subset O(\alpha_0, \dots, \alpha_n).$$

Por passagem ao fecho de Zariski concluímos que $\psi(\mathbb{P}_k^1) = \overline{\psi(\mathbb{P}_k^1 - \{[1 : 0]\})} \subset O(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$.

Em particular, resulta $\psi([1 : 0]) = N \in \mathcal{O}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$. Assim, removendo as redundâncias por permutações podemos reescrever $\text{Tr}_0(0; n+1)$ como união de fechados irredutíveis:

$$\text{Tr}_0(0; n+1) = \bigcup_{[\alpha_0 : \dots : \alpha_n] \in I} \mathcal{O}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$$

com $\mathcal{O}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \not\subseteq \mathcal{O}(\beta_0, \dots, \beta_n)$ se $[\alpha_0 : \dots : \alpha_n] \neq [\beta_0 : \dots : \beta_n]$. Isso demonstra o teorema. \square

Corolário 4.5.3. *Seja $i(n, p)$ o número das componentes irredutíveis de $\text{Tr}_0(0; n+1)$. Então,*

$$\frac{p^{n-1}}{(n-1)!} \leq i(n, p) \leq p^n.$$

Demonstração. De fato, a coleção de $n+1$ -tuplas $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in k^{n+1}$ tais que $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 0$ e $\alpha_i \alpha_j^p = \alpha_i^p \alpha_j$ se correspondem aos \mathbb{F}_p -pontos da variedade em \mathbb{P}_k^n definida pelo polinômio $F = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n$. Temos ainda que para cada $n+1$ -tupla $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ e permutação π do conjunto $\{0, \dots, n\}$ as variedades $\mathcal{O}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ e $\mathcal{O}(\alpha_{\pi(0)}, \dots, \alpha_{\pi(n)})$ são iguais já que as matrizes $D(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ e $D(\alpha_{\pi(0)}, \dots, \alpha_{\pi(n)})$ são conjugadas. Como $\mathcal{Z}(F) \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$ temos que $i(n, p)$ é a quantidade de elementos no conjunto $\mathbb{P}_k^{n-1}(\mathbb{F}_p)/S_{n-1}$, onde o grupo de permutações S_{n-1} age em $\mathbb{P}_k^{n-1}(\mathbb{F}_p)$ de maneira natural: dados $\pi \in S_{n-1}$ e $[a_0 : \dots : a_{n-1}] \in \mathbb{P}_k^{n-1}(\mathbb{F}_p)$ definimos $\pi \cdot [a_0 : \dots : a_{n-1}] = [a_{\pi^{-1}(0)} : \dots : a_{\pi^{-1}(n-1)}]$. Pelo Lema de Burnside (ver [43, Theorem 3.22]) sabemos que

$$i(n, p) = \#(\mathbb{P}_k^{n-1}(\mathbb{F}_p)/S_{n-1}) = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \# \mathbb{P}_k^{n-1}(\mathbb{F}_p)^\sigma / (n-1)!$$

onde $\mathbb{P}_k^{n-1}(\mathbb{F}_p)^\sigma = \{x \in \mathbb{P}_k^{n-1}(\mathbb{F}_p) \mid \sigma \cdot x = x\}$. Tomando $\sigma = id$ obtemos $\mathbb{P}_k^{n-1}(\mathbb{F}_p)^\sigma = \mathbb{P}_k^{n-1}(\mathbb{F}_p)$. Em particular, $i(n, p) \geq \frac{p^{n-1}}{(n-1)!}$. Por outro lado, temos que $\# \mathbb{P}_k^{n-1}(\mathbb{F}_p)^\pi \leq \# \mathbb{P}_k^{n-1}(\mathbb{F}_p) < p^n$ para qualquer permutação $\pi \in S_{n-1}$. Assim, $i(n, p) \leq p^n$ o que demonstra o corolário. \square

4.5.1 Componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\text{ol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e denote por $\mathbb{F}\text{ol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$ o espaço parametrizando as folheações de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n ($n \geq 2$) que são p -fechadas. Para cada $[\alpha_0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_{n-1} : \alpha_n] \in \mathbb{P}_k^n$ denote por $\mathcal{F}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ a folheação de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n determinada pelo campo

$$v(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \alpha_0 x_0 \partial_{x_0} + \alpha_1 x_1 \partial_{x_1} + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} \partial_{x_{n-1}} + \alpha_n x_n \partial_{x_n}.$$

Considere a seguinte subvariedade de $\mathbb{F}\text{ol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$:

$$V(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \overline{\{\mathcal{F} \in \mathbb{F}\text{ol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0) \mid \mathcal{F} \text{ é conjugada via } \text{Aut}(\mathbb{P}_k^n) \text{ a } \mathcal{F}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)\}}.$$

onde a barra significa o fecho de Zariski.

Usando o isomorfismo da Proposição 4.4.1 podemos apresentar a prova do Teorema A. Relembramos o enunciado.

Teorema A. *Suponha que p não divide $n+1$. Se $[\alpha_0 : \dots : \alpha_n] \in \mathbb{P}_k^n(\mathbb{F}_p)$ e $\sum_i \alpha_i = 0$ então $V(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\text{ol}_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$. Além disso, toda componente irredutível de tal espaço é dessa forma.*

Demonstração. Pela Proposição 4.4.2 sabemos que o isomorfismo da Proposição 4.4.1 se restringe a um isomorfismo

$$\psi : \mathbb{F}ol_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0) \longrightarrow \text{Tr}_0(0; n+1)$$

que associa uma folheação p -fechada $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$ à matriz determinada pelo campo homogêneo com divergente nulo representando \mathcal{F} . Assim, as componentes irredutíveis de $\mathbb{F}ol_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$ são da forma $\psi^{-1}(\mathcal{O}(\alpha_0, \dots, \alpha_n))$. Por outro lado, segue da definição do isomorfismo acima que a imagem inversa da componente $\mathcal{O}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ é precisamente $V(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$. Isso demonstra o teorema. \square

Corolário 4.5.4. *Seja $\mathbb{F}ol_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$ o fechado em $\mathbb{F}ol_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)$ que corresponde às folheações de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^n que são p -fechadas e suponha que p não divide $n+1$. Denote por $i(n, p)$ o número das componentes irredutíveis de $\mathbb{F}ol_{1,1}(\mathbb{P}_k^n)(0)$. Então,*

$$\frac{p^{n-1}}{(n-1)!} \leq i(n, p) \leq p^n.$$

Demonstração. Segue do Corolário 4.5.3. \square

Corolário 4.5.5. *Seja \mathcal{C} uma folheação de dimensão um e grau um em \mathbb{P}_k^3 . Suponha que \mathcal{C} seja p -fechada e seja $\{\mathcal{C}_t\}_{t \in T}$ uma família de folheações p -fechadas com $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ para algum ponto fechado $0 \in T$. Se \mathcal{C} é definida pela mapa racional*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P}_k^3 &\dashrightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1 \\ [x_0 : x_1 : y_0 : y_1] &\mapsto ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \end{aligned}$$

então existe um aberto U contendo 0 tal que para todo $t \in U$ temos que \mathcal{C}_t é definida por um mapa racional $\Phi_t : \mathbb{P}_k^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ de grau um com $\Phi_0 = \Phi$.

Demonstração. Pelo Teorema A sabemos que existe um aberto U contendo 0 tal que para todo $t \in U$ a folheação \mathcal{C}_t é definida por um campo v_t que é conjugado ao campo v . Usando a matriz que realiza a conjugação, podemos construir um automorfismo $\gamma_t : \mathbb{P}_k^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^3$ de modo que a composição $\Phi_t = \Phi \circ \gamma_t$ define a folheação \mathcal{C}_t . Isso encerra a demonstração. \square

Capítulo 5

Folheações em superfícies e o p -divisor em \mathbb{P}_k^2 e Σ_d

Resumo. No presente capítulo apresentamos um teorema de estrutura do p -divisor para folheações em \mathbb{P}_k^2 e nas d -superfícies de Hirzebruch Σ_d ($d \geq 0$). Mostramos que, sob certas condições no fibrado normal, uma folheação genérica em \mathbb{P}_k^2 e em Σ_d ($d \geq 0$) admite p -divisor reduzido.

5.1 Introdução

Na monografia [27] Jouanolou demonstra que uma folheação muito genérica de grau $d \geq 2$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ não admite nenhuma solução algébrica. O ponto crucial do argumento consiste em construir exemplos para cada grau $d \geq 2$ de folheações que não admitem nenhuma solução algébrica. O termo muito genérico significa que existe uma união enumerável própria de conjuntos fechados F no espaço das folheações holomorfas de grau d tal que para qualquer folheação $\mathcal{F} \notin F$ satisfaz a condição de não possuir nenhuma solução algébrica.

Para provar o teorema, Jouanolou demonstra o seguinte resultado.

Teorema (Jouanolou). *Para todo $d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ a folheação em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ definida pelo campo*

$$v_d = (x^d y - 1) \frac{\partial}{\partial x} - (x^d - y^{d+1}) \frac{\partial}{\partial y}$$

não admite nenhuma solução algébrica.

Recentemente, um problema similar foi abordado em [33] para superfícies de Hirzebruch. Sob certas condições no fibrado normal, o autor mostra que uma folheação na d -superfície de Hirzebruch Σ_d não admite nenhuma solução algébrica (ver [33, Theorem C]).

O fato interessante (ver [39]) é que um análogo do teorema de Jouanolou sobre um corpo k de característica positiva $p > 0$ é falso. Como consequência dos resultados em [39] temos o seguinte resultado (compare com a Proposição 3.3.12):

Proposição 5.1.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação em \mathbb{P}_k^2 e suponha que $\deg(\mathcal{F}) < p - 1$. Então, \mathcal{F} admite uma curva algébrica \mathcal{F} -invariante.*

Por outro lado, como as folheações não p -fechadas formam um aberto no espaço das folheações, podemos indagar sobre a estrutura do p -divisor.

Problema 1. *Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica \mathcal{F} ?*

Apresentamos resultados na direção do problema acima restringindo às superfícies \mathbb{P}_k^2 e Σ_d para $d \geq 0$. Mais precisamente, demonstraremos os seguintes teoremas:

Teorema B. *Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$. Uma folheação genérica em \mathbb{P}_k^2 de grau $d \geq 1$ com $p \nmid d + 2$ tem p -divisor reduzido.*

Teorema C. *Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$. Sejam Σ_d a d -superfície de Hirzebruch definida sobre k e $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Sejam F uma fibra da projeção natural $\pi : \Sigma_d \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ e M_d uma seção satisfazendo as condições*

$$F \cdot M_d = 1 \quad M_d^2 = d.$$

Então, uma folheação genérica em Σ_d com fibrado normal N numericamente equivalente a $(d_1 - d + 2)F + (d_2 + 2)M_d$ possui p -divisor reduzido.

Na Seção 5.2 damos uma definição alternativa de folheações em superfícies definidas sobre corpos de característica $p > 0$ onde estudamos e relembramos a representação de folheações em \mathbb{P}_k^2 e em Σ_d . Na Seção 5.3 tratamos o problema para folheações em \mathbb{P}_k^2 e na Seção 5.4 estudamos o problema em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$. Na Seção 5.5 finalizamos considerando o caso Σ_d com $d > 1$. Na última seção apresentamos alguns problemas e exemplos relacionando folheações definidas sobre corpos de característica $p > 0$ e folheações definidas sobre \mathbb{C} .

5.2 Folheações em superfícies

Sejam k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e X uma superfície sobre k . Uma folheação em X consiste em um sistema $\{(U_i, \omega_i, v_i)\}_{i \in I}$ tal que:

- $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de X .
- Para cada $i \in I$ temos $v_i \in T_X(U_i)$, $\omega_i \in \Omega_{X/k}^1(U_i)$ tais que $i_{v_i} \omega_i = 0$.
- Em $U_i \cap U_j$ temos $\omega_i = f_{ij} \omega_j$ e $v_i = g_{ij} v_j$ para algumas funções $f_{ij}, g_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_{ij})^*$.
- Para cada $i \in I$ temos $\text{codim sing}(\omega_i) \geq 2$ e $\text{codim sing}(v_i) \geq 2$.

Note que a definição acima é uma versão alternativa da Definição 2.1.1. De fato, dada uma folheação $\{(U_i, \omega_i, v_i)\}_{i \in I}$ em X podemos construir um subfeixe saturado de T_X da seguinte maneira: para cada aberto não vazio U de X definimos $T_{\mathcal{F}}(U)$ pondo

$$T_{\mathcal{F}}(U) = \{v \in T_X(U) \mid i_v \omega_i|_{U_i} = 0 \text{ em } U \cap U_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Garantimos que $T_{\mathcal{F}}$ é um subfeixe saturado de T_X pela condição no conjunto singular de ω_i . Reciprocamente, seja $T_{\mathcal{F}}$ uma folheação em X e considere a seção global não nula $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes N_{\mathcal{F}})$ induzida por $T_{\mathcal{F}}$ (veja a Observação 2.1.7). Então, pela definição obtemos uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de X , 1-formas $\omega_i \in \Omega_X^1(U_i)$ e funções $\{f_{ij}\}_{i,j}$ com $f_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ representando $N_{\mathcal{F}}^*$ tais que

$$\omega_i = f_{ij} \omega_j.$$

Como $T_{\mathcal{F}}$ é um subfeixe saturado de T_X garantimos que $\text{codim sing}(\omega_i) \geq 2$ para todo i . Observe que os campos v_i são obtidos por maneira similar considerando uma seção global não nula $v \in H^0(X, T_X \otimes T_{\mathcal{F}}^*)$ induzida pelo morfismo injetivo $T_{\mathcal{F}} \rightarrow T_X$. Pela construção obtemos campos $\{v_i\}_{i \in I}$ em $\{U_i\}_{i \in I}$ tais que para cada i o campo v_i é tangente a 1-forma ω_i que definem \mathcal{F} em U_i .

Seja $\{(U_i, \omega_i, v_i)\}_{i \in I}$ uma folheação em X . As coleções $\{f_{ij}^{-1}\}, \{g_{ij}\}$ determinam elementos de $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \text{Pic}(X)$ e os fibrados lineares associados são o fibrado conormal $\Omega_{X/\mathcal{F}}^1$ e fibrado cotangente $\Omega_{\mathcal{F}}^1$ associados a \mathcal{F} . Quaisquer divisores nas classes lineares correspondentes a $\Omega_{\mathcal{F}}^1$ e $(\Omega_{X/\mathcal{F}}^1)^*$ serão chamados respectivamente de divisor canônico e divisor normal associados a \mathcal{F} e serão denotados por $K_{\mathcal{F}}$ e $N_{\mathcal{F}}$.

5.2.1 p -divisor para folheações em superfícies

Seja $\mathcal{F} = \{(U_i, \omega_i, v_i)\}$ uma folheação em X .

Definição 5.2.1. Dizemos que \mathcal{F} é p -fechada se para algum i temos $v_i \wedge v_i^p = 0$.

Observação 5.2.2. Note que $v_i \wedge v_i^p = 0$ para algum i se e somente se $v_j \wedge v_j^p = 0$ para todo j . De fato, como $v_i = g_{ij}v_j$ temos que (veja Proposição 3.2.2) $v_i^p = g_{ij}^p v_j^p + h_{ij}v_j$ para alguma função regular h_{ij} e daí resulta: $v_i \wedge v_i^p = g_{ij}v_j \wedge (g_{ij}^p v_j^p + h_{ij}v_j) = g_{ij}v_j \wedge (g_{ij}^p v_j^p + h_{ij}v_j) = g_{ij}^{p+1} v_j \wedge v_j^p$. Assim, $v_i \wedge v_i^p = 0$ se e somente se $v_j \wedge v_j^p = 0$.

Suponha que \mathcal{F} seja não p -fechada. Em cada U_{ij} temos relações:

$$\omega_i = f_{ij}\omega_j \quad v_i = g_{ij}v_j.$$

Como estamos assumindo que \mathcal{F} é não p -fechada, temos para cada $i, j \in I$,

$$0 \neq i_{v_i^p} \omega_i = i_{(g_{ij}v_j)^p} f_{ij} \omega_j = i_{(g_{ij}^p v_j^p + g_{ij} v_j^{p-1} (g_{ij}^{p-1} v_j))} f_{ij} \omega_j = g_{ij}^p f_{ij} i_{v_j^p} \omega_j \neq 0.$$

Assim, a coleção $\{i_{v_i^p} \omega_i\}_{i \in I}$ determina uma seção global $0 \neq s_{\mathcal{F}} \in H^0(X, (\Omega_{\mathcal{F}}^1)^{\otimes p} \otimes N_{\mathcal{F}})$.

Observação 5.2.3. Seja \mathcal{F} uma folheação em X não p -fechada. O p -divisor associado a \mathcal{F} (ver Definição 3.3.7) coincide com o divisor de zeros da seção $s_{\mathcal{F}}$, isto é,

$$\Delta_{\mathcal{F}} = (s_{\mathcal{F}})_0 \in \text{Div}(X).$$

Exemplo 5.2.4. Sejam $X = \mathbb{A}_k^2$ e $\alpha \in k$. Seja \mathcal{F} a folheação definida pelo campo

$$v = x\partial_x + \alpha y\partial_y.$$

Então, \mathcal{F} é p -fechada se e somente se $\alpha \in \mathbb{F}_p$ e se $\alpha \notin \mathbb{F}_p$ temos $s_{\mathcal{F}} = (\alpha^p - \alpha)xy$.

Seja \mathcal{F} uma folheação em uma superfície X e $Q \in \text{sing}(\mathcal{F})$. Dizemos que Q é **não degenerada** com **valor característico** $\alpha \in k$ se existe um aberto afim $U \subset \mathbb{A}_k^2$ em torno de Q tal que $\mathcal{F}|_U$ pode ser representada por um campo polinomial $v = v_1 + O(2)$ com v_1 da forma $v_1 = x\partial_x + \alpha y\partial_y$ e α não nulo.

Definição 5.2.5. Seja \mathcal{F} uma folheação em uma superfície X e $Q \in \text{sing}(\mathcal{F})$. Dizemos que Q é p -**reduzida** se Q é não degenerada e possui valor característico $\alpha(Q)$ satisfazendo: $\alpha(Q) \notin \mathbb{F}_p$.

Lema 5.2.6. *Seja \mathcal{F} uma folheação em uma superfície X e $Q \in \text{sing}(\mathcal{F})$ uma singularidade p -reduzida de \mathcal{F} . Então, \mathcal{F} não é p -fechada.*

Demonstração. Sejam U um aberto afim contendo Q e $x, y \in \mathcal{O}_{X,Q}$ um sistema de parâmetros sobre Q em U . Em U a folheação é dada por um campo v da forma:

$$v = v_1 + \tilde{v}$$

onde $v_1 = x\partial_x + \alpha y\partial_y$ com $\alpha \notin \mathbb{F}_p$ e \tilde{v} consiste em termos de ordem maior que 1. Então, $v^p = v_1^p + \tilde{v}_p$ com \tilde{v}_p contendo somente termos homogêneos de ordem maior que 1. Note ainda que $v_1^p = x\partial_x + \alpha^p y\partial_y$ e $v_1 \wedge v_1^p$ é a componente homogênea de menor grau que ocorre em $v \wedge v^p$. Como $\alpha \notin \mathbb{F}_p$ garantimos que $v_1 \wedge v_1^p = (\alpha^p - \alpha)\partial_x \wedge \partial_y \neq 0$ e daí $v \wedge v^p \neq 0$. \square

Lema 5.2.7. *Seja X uma superfície própria não singular sobre k e \mathcal{F} uma folheação não p -fechada em X . Seja $Q \in \text{sing}(\mathcal{F})$ uma singularidade p -reduzida de \mathcal{F} . Suponha que $\Delta_{\mathcal{F}}$ seja reduzido e seja $\pi_Q : \text{Bl}_Q(X) \rightarrow X$ a explosão centrada em Q . Então, $\pi^*\mathcal{F}$ define uma folheação em $\text{Bl}_Q(X)$ com p -divisor reduzido.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G} = \pi_Q^*\mathcal{F}$ a folheação induzida em $\text{Bl}_Q(X)$. Como Q é uma singularidade p -reduzida temos que

$$K_{\mathcal{G}} - \pi_Q^*K_{\mathcal{F}} = 0 \quad N_{\mathcal{G}} - \pi_Q^*N_{\mathcal{F}} = -E.$$

De fato, em um aberto afim $U \subset \mathbb{A}_k^2$ a folheação é representada por uma 1-forma $\omega = \omega_1 + O(2)$ onde $\omega_1 = ydx - \alpha xdy$ com $\alpha \notin \mathbb{F}_p$ e $O(2)$ contendo somente termos de ordem pelo menos dois. Em um sistema de coordenadas conveniente o mapa $\pi_Q : \text{Bl}_Q(X) \rightarrow X$ associa $(x, t) \mapsto (x, xt)$. Como $\pi_Q^*\omega$ é uma seção local de $N_{\pi_Q^*\mathcal{F}}$ temos que $[\pi_Q^*\omega]_0 = N_{\pi_Q^*\mathcal{F}}$. Por outro lado, como Q é p -reduzida temos que $\pi_Q^*\omega = \pi_Q^*\omega_1 + O(2) = (xtdx - \alpha x(xdt + tdx)) + O(2) = x(t(1-\alpha)dx + xdt + O(2))$. Denote $\tilde{\omega} = t(1-\alpha)dx + xdt + O(2)$ e observe que $\tilde{\omega}$ é uma seção local de $\pi_Q^*N_{\mathcal{F}}$. Daí, $N_{\mathcal{G}} = N_{\pi_Q^*\mathcal{F}} = [\pi_Q^*\omega]_0 = [x]_0 + [\tilde{\omega}]_0 = E + \pi_Q^*N_{\mathcal{F}}$. A fórmula comparando $\pi_Q^*K_{\mathcal{F}}$ e $K_{\pi_Q^*\mathcal{F}}$ se segue pela fórmula de adjunção: $K_X = K_{\mathcal{F}} - N_{\mathcal{F}}$. Daí, resulta:

$$[\Delta_{\mathcal{G}}] = pK_{\mathcal{G}} + N_{\mathcal{G}} = p\pi_Q^*K_{\mathcal{F}} + \pi_Q^*N_{\mathcal{F}} - E = \pi_Q^*[\Delta_{\mathcal{F}}] - E = \tilde{\Delta}_{\mathcal{F}} + (m_Q(\Delta_{\mathcal{F}}) - 1)E$$

onde $\tilde{\Delta}_{\mathcal{F}}$ denota a transformada estrita do divisor $\Delta_{\mathcal{F}}$ e $m_Q(\Delta_{\mathcal{F}})$ é a multiplicidade de $\Delta_{\mathcal{F}}$ em Q . Como Q é p -reduzida, usando [36, Fact 2.8] concluímos que $m_Q(\Delta_{\mathcal{F}}) = 2$ de modo que $[\Delta_{\mathcal{G}}] = \tilde{\Delta}_{\mathcal{F}} + E$. \square

Lema 5.2.8. *Seja (X, H) uma superfície polarizada, não-singular e própria sobre k . Suponha que k tenha característica $p > 2$ e sejam \mathcal{N} um feixe invertível e $\mathbb{F}ol_{\mathcal{N}}(X) = \mathbb{P}(H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{N}))$ o espaço parametrizando folheações em X com feixe normal \mathcal{N} . Suponha que tal espaço seja não vazio e considere os seguintes conjuntos*

$$U = \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_{\mathcal{N}}(X) \mid \Delta_{\mathcal{F}} \text{ é reduzido}\} \quad e \quad V = \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_{\mathcal{N}}(X) \mid \Delta_{\mathcal{F}} \text{ é primo}\}.$$

Então, U e V são abertos.

Demonstração. Note inicialmente que $\text{deg}(\Delta_{\mathcal{F}})$ depende apenas de X e \mathcal{N} . Com efeito, temos a fórmula:

$$\text{deg}(\Delta_{\mathcal{F}}) = pK_{\mathcal{F}} \cdot H + \mathcal{N} \cdot H = p(K_X + \mathcal{N}) \cdot H + \mathcal{N} \cdot H = pK_X \cdot H + (p+1)\mathcal{N} \cdot H.$$

Dado $e \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ seja $Z_e(X)$ o espaço parametrizando todas as curvas em X de grau e . No que se segue usamos o fato de que $Z_e(X)$ é uma variedade projetiva sobre k (veja [29, Theorem 1.4]). Defina os conjuntos

$$S_e = \{(C, \mathcal{F}) \in Z_e(X) \times \mathbb{F}ol_{\mathcal{N}}(X) \mid 2C \leq \Delta_{\mathcal{F}}\},$$

$$\tilde{S}_e = \{(C, \mathcal{F}) \in Z_e(X) \times \mathbb{F}ol_{\mathcal{N}}(X) \mid C \leq \Delta_{\mathcal{F}}\}.$$

Como as condições $2C \leq \Delta_{\mathcal{F}}$ e $C \leq \Delta_{\mathcal{F}}$ são relações fechadas temos que S_e e \tilde{S}_e são fechados em $Z_e(X) \times \mathbb{F}ol_{\mathcal{N}}(X)$. Seja $\pi_e : Z_e(X) \times \mathbb{F}ol_{\mathcal{N}}(X) \rightarrow \mathbb{F}ol_{\mathcal{N}}(X)$ projeção natural. Como π_e é uma aplicação própria garantimos que $\pi_e(S_e)$ e $\pi_e(\tilde{S}_e)$ são fechados em $\mathbb{F}ol_{\mathcal{N}}(X)$. Denote por $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}ol_{\mathcal{N}}(X)$ o fechado que consiste das folheações que são p -fechadas e considere os seguintes conjuntos:

$$T_1 = \mathbb{F}ol_{\mathcal{N}}(X) - (\mathbb{F} \cup \bigcup_{j=1}^{\lfloor \frac{\deg(\Delta_{\mathcal{F}})}{2} \rfloor} \pi_j(S_j)) \quad T_2 = \mathbb{F}ol_{\mathcal{N}}(X) - (\mathbb{F} \cup \bigcup_{j=1}^{\deg(\Delta_{\mathcal{F}})-1} \pi_j(\tilde{S}_j)).$$

Afirmamos que valem as seguintes igualdades: $U = T_1$ e $V = T_2$. De fato, as inclusões $U \subset T_1$ e $V \subset T_2$ são claras. Por outro lado, sejam $\mathcal{G}_1 \in T_1$ e $\mathcal{G}_2 \in T_2$. Suponha por contradição que $\Delta_{\mathcal{G}_1}$ não seja reduzido e que $\Delta_{\mathcal{G}_2}$ não seja um divisor primo. Em particular, existem curvas C_1 e C_2 em X tais que $2C_1 \leq \Delta_{\mathcal{G}_1}$ e $C_2 \leq \Delta_{\mathcal{G}_2}$ com $\deg(C_2) < \deg(\Delta_{\mathcal{G}_2})$. Como $\deg(\Delta_{\mathcal{G}_i})$ depende apenas de K_X e \mathcal{N} computando os graus resulta:

$$2 \deg(C_1) \leq \deg(\Delta_{\mathcal{G}_1}) = \deg(\Delta_{\mathcal{F}}) \quad \text{e} \quad \deg(C_2) \leq \deg(\Delta_{\mathcal{G}_2}) - 1 = \deg(\Delta_{\mathcal{F}}) - 1$$

o que implica

$$\mathcal{G}_1 \in \mathbb{F} \cup \bigcup_{j=1}^{\lfloor \frac{\deg(\Delta_{\mathcal{F}})}{2} \rfloor} \pi_j(S_j) \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_2 \in \mathbb{F} \cup \bigcup_{j=1}^{\deg(\Delta_{\mathcal{F}})-1} \pi_j(\tilde{S}_j)$$

uma contradição. □

No que se segue denotaremos os abertos acima por $U(X, H, \mathcal{N})$ e $V(X, H, \mathcal{N})$.

5.2.2 Folheações em $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$

Sejam $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$. Uma folheação em $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ de grau e é determinada por uma seção global de $\Omega_{\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2}^1(e+2)$. Usando a sequência exata de Euler (ver[22, Theorem 8.13]) segue que uma folheação em $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ é dada, módulo elementos de k^* , por uma 1-forma

$$\Omega = Adx + Bdy + Cdz$$

onde $A, B, C \in k[x, y, z]_{e+1}$ com $\mathcal{Z}(A, B, C) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ finito e tal que $i_R \Omega = 0$, onde R é o campo radial:

$$R = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z.$$

Exemplo 5.2.9. *Seja \mathcal{F} uma folheação em $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ com fibrado normal $N = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2}(d+2)$ e suponha*

que $p \nmid \deg(N)$. Suponha que \mathcal{F} está definida pela 1-forma homogênea:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e escreva:

$$d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy).$$

Seja $v \in \mathfrak{X}_d(k^3)$ o campo homogêneo definido por:

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

Segue de [27, Proposition 1.1.4] que a associação $\omega \mapsto v_\omega$ define uma bijeção entre o conjunto de 1-formas projetivas de grau $d+2$ e campos homogêneos em k^3 de grau d com divergente zero

$$\operatorname{div}(v_\omega) = L_x + M_y + N_z = 0.$$

O p -divisor é dado explicitamente por

$$\Delta_{\mathcal{F}} = [i_{v^p}\omega] \in \operatorname{Div}(\mathbb{P}_k^2).$$

Exemplo 5.2.10. Seja \mathcal{F} a folheação de grau dois em $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ definida pela 1-forma projetiva

$$\omega = yz^2dx - z(4yz + 2xz + 2y^2)dy + (xyz + 4y^2z + 2y^3)dz.$$

Para todo inteiro primo $p \in \mathbb{Z}$ maior do que 3 considere \mathcal{F}_p a folheação obtida por redução módulo p da 1-forma que define \mathcal{F} . Então, \mathcal{F}_p é não p -fechada e

$$\Delta_{\mathcal{F}_p} = 3\{y = 0\} + (p+1)\{z = 0\}.$$

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que \mathcal{F}_p é não p -fechada para todo primo $p > 3$. Fixe um primo $p > 3$ e considere a folheação \mathcal{F}_p definida em \mathbb{P}_k^2 por redução módulo p dos coeficientes da 1-forma ω . Como o problema é local podemos restringir a folheação ao aberto $U = D_+(z) \cong \mathbb{A}_k^2$. Em tal aberto U , a folheação é dada pelo campo

$$v = (4y + 2x + 2y^2)\partial_x + y\partial_y$$

Observe que $v(x) = 4y + 2x + 2y^2$. Um argumento indutivo mostra que para todo $k \geq 3$ temos que

$$v^k(x) = 2^2(2(2^{k-2} + 2^{k-3} + \dots + 2 + 1) + 1)y + k2^k y^2 + 2^k x.$$

Daí, resulta que $v^p(x) = 4y + 2^p x = 4y + 2x$, já que $0 = 2^{p-1} - 1 = (2^{p-2} + \dots + 1)$ em \mathbb{F}_p . Em particular, temos $v^p(x)v(y) - v^p(y)v(x) = y(v^p(x) - 4y - 2y^2 - 2x) = y(-2y^2) = -2y^3 \neq 0$. Assim, a folheação definida por v é não p -fechada se $p > 3$. Segue daí que o p -divisor da folheação \mathcal{F}_p é dado por $\Delta_{\mathcal{F}_p} = 3\{y = 0\} + (p+1)\{z = 0\}$. \square

5.3 p -divisor em \mathbb{P}_k^2

O seguinte lema será de suma importância nas próximas seções.

Lema 5.3.1. Sejam $F \in k[x_0, \dots, x_n]$ um polinômio reduzido e $l \in \mathbb{Z}$ inteiro positivo com $\operatorname{mdc}(l, p) = 1$. Suponha que $x_0 \nmid F$. Então, $F(x_0^l, x_1, \dots, x_n)$ é reduzido.

Demonstração. Note inicialmente que se x_0 não ocorre em F então não há o que demonstrar. Assim, podemos supor que x_0 ocorre em F . Vamos tratar inicialmente o caso em que F é irredutível. Observe que é suficiente considerar o caso em que $n = 0$. Com efeito, se $R = k[x_1, \dots, x_n]$ e K é o seu corpo de frações então pelo Lema de Gauss (ver [31, Theorem 2.1]) sabemos que $F \in R[x_0]$ é irredutível se e somente se $F = a_0 + a_1x_0 + \dots + a_dx_0^d \in K[x_0]$ é irredutível e possui conteúdo 1, isto é, o máximo divisor comum dos coeficientes é 1. Assim, como estamos assumindo que F é irredutível temos, em particular, que é irredutível sobre $K[x_0]$ onde $K = k(x_1, \dots, x_n)$. Seja $g(x_0) = F(x_0^l) \in K[x_0]$. Note que o conteúdo de g é 1, já que os coeficientes de g são iguais aos coeficientes de F . Por outro lado, a irredutibilidade de F implica a que g é reduzido: Com efeito, para ver isso basta provar que $\text{mdc}(g(x_0), \frac{dg}{dx_0}) = 1$. Agora, derivando temos

$$\frac{dg}{dx_0} = lF'(x_0^l)x_0^{l-1} \neq 0.$$

Como F é irredutível garantimos que $F'(x_0^l)$ e $F(x_0^l)$ são coprimos. Em particular, obtemos $\text{mdc}(g(x_0), g'(x_0)) = 1$. Assim, $g(x_0)$ é reduzido em $R[x_0] = k[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Suponha agora que F é redutível. Sejam $R = k[x_1, \dots, x_n]$ e K seu corpo de frações. Note que, sem perda de generalidade, podemos supor que $F \in R[x_0]$ possui conteúdo igual a um. Sejam G e H dois fatores irredutíveis de F . Vamos mostrar que $\tilde{G} = G(x_0^l, x_1, \dots, x_n)$ e $\tilde{H} = H(x_0^l, x_1, \dots, x_n)$ não admitem fatores irredutíveis em comum. Pelo Lema de Gauss (ver [31, Theorem 2.1]) é suficiente mostrar que \tilde{G} e \tilde{H} não admitem fatores irredutíveis em comum sobre $K[x_0]$, onde $K = k(x_1, \dots, x_n)$. Por outro lado, como G e H não têm fatores em comum sobre $k[x_0, \dots, x_n]$ temos, em particular, que não têm fatores irredutíveis em comum sobre $K[x_0]$. Assim, existem $A(x_0), B(x_0) \in K[x_0]$ tais que

$$A(x_0)G + B(x_0)H = 1.$$

Especializando a identidade acima para x_0^l concluímos que

$$A(x_0^l)\tilde{G} + B(x_0^l)\tilde{H} = 1$$

e assim \tilde{G} e \tilde{H} não admitem fatores em comum sobre $K[x_0]$. Desse modo, reduzimos ao caso F irredutível considerando sua decomposição em fatores irredutíveis. \square

Observação 5.3.2. *Seja $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ com $\text{mdc}(l, p) = 1$. Em geral, não garantimos que se $f \in k[x]$ é irredutível então $g(x) = f(x^l)$ é irredutível. De fato, seja $p > 2$ e tome $f(x) = x - 1$. Se $l \in 2\mathbb{Z}$ então temos*

$$g(x) = f(x^l) = (x^{\frac{l}{2}} - 1)(x^{\frac{l}{2}} + 1)$$

polinômio redutível.

No que se segue apresentamos a prova do Teorema B. Relembre o enunciado.

Teorema B. *Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$. Uma folheação genérica em \mathbb{P}_k^2 de grau $d \geq 1$ com $p \nmid d+2$ tem p -divisor reduzido. Mais precisamente, temos $U(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), N) \neq \emptyset$, se $p \nmid \deg(N)$ e $\deg(N) \geq 3$.*

Para demonstrar o teorema acima iremos considerar inicialmente o caso em que $d \in \{1, 2\}$ e em seguida usar o caso de $d = 2$ para obter o caso geral. Dividiremos a prova em proposições.

Proposição 5.3.3. *Uma folheação genérica em \mathbb{P}_k^2 de grau $d \in \{1, 2\}$ com $p \nmid d + 2$ tem p -divisor reduzido. Mais precisamente, temos $U(\mathbb{P}_k^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), N) \neq \emptyset$, se $p \nmid \deg(N)$ e $3 \leq \deg(N) \leq 4$.*

Demonstração. Se $\deg(N) = 3$, isto é, $d = 1$ então não é difícil verificar que existem exemplos de folheações com p -divisor reduzido. Com efeito, se $\alpha \in k - \mathbb{F}_p$ considere a folheação \mathcal{F}_α em \mathbb{P}_k^2 dada pela 1-forma

$$\Omega_\alpha = -yzdx + \alpha xzdy + (1 - \alpha)xydz.$$

A condição $\alpha \notin \mathbb{F}_p$ implica que \mathcal{F}_α é não p -fechada (ver Lema 5.2.6) com

$$\Delta_{\mathcal{F}_\alpha} = \{x = 0\} + \{y = 0\} + \{z = 0\}.$$

Consideremos agora o caso em que $\deg(N) = 4$ e seja $D_+(z) = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_k^2 \mid z \neq 0\}$. O exemplo será obtido por compactificação via o isomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi: D_+(z) &\longrightarrow \mathbb{A}_k^2 \\ [x : y : z] &\mapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) \end{aligned}$$

de uma folheação \mathcal{G} em \mathbb{A}_k^2 dada pela 1-forma:

$$\omega = ydx - xdy + \omega_2 \quad \text{onde} \quad \omega_2 = a(x, y)dx + b(x, y)dy$$

para $a, b \in k[x, y]$ homogêneos genéricos de grau 2. Note que \mathcal{G} possui três retas \mathcal{G} -invariantes que passam por $(0, 0)$. De fato, tais retas são dadas explicitamente pelo polinômio $i_R\omega_2 = l_1l_2l_3$, onde R é o campo radial em \mathbb{A}_k^2 : $R = x\partial_x + y\partial_y$. Como a e b são genéricos, podemos supor ainda que l_1, l_2 e l_3 ocorrem com multiplicidade 1 em $\Delta_{\mathcal{G}}$. De fato, escolhemos as retas l_1, l_2, l_3 tais que para cada i temos que $l_i \cap l_\infty = \{P_i\}$ seja uma singularidade p -reduzida de \mathcal{G} . Nesse caso, pelo [36, Fact 2.8] garantimos que l_i ocorre com multiplicidade 1 ao longo de $\Delta_{\mathcal{G}}$. Seja \mathcal{F} a folheação obtida por compactificação de \mathcal{G} em \mathbb{P}_k^2 , via Φ . Note que pelo Lema 5.2.6 temos que \mathcal{F} não é p -fechada com quatro retas invariantes, l_1, l_2, l_3 e $l_\infty = \{z = 0\}$, de modo que $\Delta_{\mathcal{F}} = l_1 + l_2 + l_3 + l_\infty + C$ para C alguma curva de grau p . Vamos mostrar que uma escolha genérica de a, b implica que C é irredutível e admite $Q = [0 : 0 : 1]$ como uma singularidade de multiplicidade $m_Q(C) = p - 1$. Para isso, sejam $\pi : Bl_Q(\mathbb{P}_k^2) \longrightarrow \mathbb{P}_k^2$ o Blow-up centrado em Q e fixe E o divisor excepcional e F uma fibra da projeção natural $\pi : Bl_Q(\mathbb{P}_k^2) \longrightarrow \mathbb{P}_k^1$. Note que as curvas $\{F, E\}$ formam uma base de $\text{Num}_{\mathbb{Q}}(Bl_Q(\mathbb{P}_k^2))$ satisfazendo as condições $E^2 = -1$, $E \cdot F = 1$ e $F^2 = 0$. Seja $\mathcal{H} = \pi^*\mathcal{F}$ a folheação induzida. Como Q é uma singularidade radial temos que (ver [4, Chapter 2, Section 3])

$$N_{\mathcal{H}}^* = \pi^*N_{\mathcal{F}}^* + 2E \quad K_{\mathcal{H}} = \pi^*K_{\mathcal{F}} - E.$$

Seja H uma reta passando por Q . Como $\pi^*N_{\mathcal{F}}^* = \pi^*(-4H) \equiv -4\pi^*H \equiv -4(F + E)$ e $\pi^*K_{\mathcal{F}} \equiv \pi^*H \equiv F + E$, concluímos que

$$\Delta_{\mathcal{H}} \equiv pK_{\mathcal{H}} + N_{\mathcal{H}} \equiv 2E + \deg(\Delta_{\mathcal{F}})F = (p + 4)F + 2E.$$

Sejam $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3$ e \tilde{l}_∞ as transformadas estritas de l_1, l_2, l_3 e l_∞ respectivamente. Como $\pi : Bl_Q(\mathbb{P}_k^2) - E \longrightarrow \mathbb{P}^2 - \{Q\}$ é um isomorfismo garantimos que $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3$ e \tilde{l}_∞ ocorrem em $\Delta_{\mathcal{H}}$, isto é

$$\Delta_{\mathcal{H}} - \tilde{l}_1 - \tilde{l}_2 - \tilde{l}_3 - \tilde{l}_\infty \geq 0.$$

Além disso, como a, b são genéricos podemos supor ainda que $\text{ord}_{l_i}(\Delta_{\mathcal{H}}) \geq 0$ para $i \in \{1, 2, 3, \infty\}$. Agora, note que

$$(\Delta_{\mathcal{H}} - \tilde{l}_1 - \tilde{l}_2 - \tilde{l}_3 - \tilde{l}_\infty) \cdot F = 1$$

de modo que existe uma curva irredutível $C \subset Bl_Q(\mathbb{P}^2)$ que é \mathcal{H} -invariante e tal que $C \cdot F = 1$. Em particular, temos $C \equiv E + \alpha F$. Observe ainda que $\alpha > 0$, já que Q é uma singularidade radial e por conseguinte E não é \mathcal{H} -invariante. Escrevendo

$$\Delta_{\mathcal{H}} - \tilde{l}_1 - \tilde{l}_2 - \tilde{l}_3 - \tilde{l}_\infty = C + R$$

para algum divisor R concluímos (usando $C \cdot F = 1$) que $R \equiv bF$, para algum $b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Agora, como ω_2 é genérico, podemos supor que $b = 0$. Com efeito, se $b \neq 0$, vemos que existe uma fibra da projeção natural $p : Bl_Q(\mathbb{P}_k^2) \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ que é \mathcal{H} -invariante (ver Proposição 3.3.11). Tal fibra se projeta em \mathbb{P}_k^2 sobre uma reta passando por Q que é \mathcal{F} -invariante. Como l_1, l_2, l_3 e l_∞ ocorrem com multiplicidade 1 em $\Delta_{\mathcal{F}}$ e são as únicas retas invariantes por \mathcal{F} , resulta uma contradição. Logo, $R = 0$ e C é uma curva irredutível \mathcal{H} -invariante com $C \equiv E + pF$. Projetando C via aplicação π , resulta em \mathbb{P}_k^2 uma curva irredutível de grau p que admite Q como uma singularidade de multiplicidade $p - 1$. De fato, $\pi_* C$ é irredutível e o grau é dado

$$\deg(\pi_*(C)) = \pi_* C \cdot H = \pi^* \pi_* C \cdot \pi^* H = (E + pF) \cdot (E + F) = -1 + p + 1 = p.$$

Por outro lado, a multiplicidade pode ser calculada do seguinte modo: $\pi^* \pi_* C =$

$$\begin{aligned} \tilde{C} + m_Q(C)E &\equiv (E + pF) + m_Q(C)E \implies 0 = \pi^* \pi_* C \cdot E = (E + pF) \cdot E - m_Q(C) \\ &\implies 0 = -1 + p - m_Q(C) \implies m_Q(C) = p - 1. \end{aligned}$$

Isso encerra a demonstração no caso em que $d \in \{1, 2\}$. □

Proposição 5.3.4. *Uma folheação genérica em \mathbb{P}_k^2 de grau $d \geq 3$ com $p \nmid d+2$ tem p -divisor reduzido. Mais precisamente, temos $U(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), N) \neq \emptyset$, se $p \nmid \deg(N)$ e $\deg(N) \geq 5$.*

Demonstração. Iremos usar o caso $d = 2$ para o caso geral. Sejam $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ e \mathcal{F} uma folheação em \mathbb{P}_k^2 de grau 2 que possui p -divisor reduzido. Pelo que foi mostrado na proposição anterior, podemos supor que existe uma tal folheação deixando uma curva irredutível C de grau p invariante e quatro retas invariantes: l_1, l_2, l_3 e l_∞ onde $l_1 \cap l_2 = l_0 \cap l_1 = l_0 \cap l_2 = \{Q\}$. Para simplificar as computações, iremos supor que $l_1 = \{x = 0\}$, $l_2 = \{y = 0\}$ e $l_3 = \{ux + vy = 0\}$ para algumas constantes $u, v \in k^*$. Nesse caso, \mathcal{F} é definida por uma 1-forma do tipo

$$\Omega_1 = yzA_0dx + xzA_1dy + xyA_2dz$$

para alguns $A_0, A_1, A_2 \in k[x, y, z]$ homogêneos de grau 1 e tais que $A_0 + A_1 + A_2 = 0$.

Considere o morfismo finito

$$\begin{aligned} \Phi_e: \mathbb{P}_k^2 &\longrightarrow \mathbb{P}_k^2 \\ [x_0 : x_1 : x_2] &\mapsto [x_0^e : x_1^e : x_2^e]. \end{aligned}$$

Seja \mathcal{H} a folheação em \mathbb{P}_k^2 definida pela saturação da 1-forma

$$\Omega = \Phi_e^* \Omega_1 = e(xy z)^{e-1} [yzA_0(x^e, y^e, z^e)dx + xzA_1(x^e, y^e, z^e)dy + xyA_2(x^e, y^e, z^e)dz].$$

Observe que \mathcal{H} é uma folheação de grau $e + 1$ não p -fechada. Como $\text{mdc}(e, p) = 1$, podemos usar o Lema 5.3.1 para garantir que $\Phi_e^* l_3$ e $\Phi_e^* C$ são curvas reduzidas com componentes irredutíveis distintas. Em particular, pela Proposição 3.3.11 garantimos que $\Phi_e^* l_3$ e $\Phi_e^* C$ são curvas \mathcal{H} -invariantes. Afirmamos que \mathcal{H} possui p -divisor

$$\Delta_{\mathcal{H}} = \{x = 0\} + \{y = 0\} + \{z = 0\} + \Phi_e^* l_3 + \Phi_e^* C.$$

De fato, note que $\Delta_{\mathcal{H}}$ é um divisor cujo grau é dado pela fórmula:

$$\deg(\Delta_{\mathcal{H}}) = pK_{\mathcal{H}} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) + N_{\mathcal{H}} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) = pe + e + 3.$$

Por outro lado, pela construção sabemos que as curvas: $\{x = 0\}, \{y = 0\}, \{z = 0\}, \Phi_e^* l_3$ e $\Phi_e^* C$ são \mathcal{H} -invariantes. Em particular,

$$\Delta_{\mathcal{H}} \geq \{x = 0\} + \{y = 0\} + \{z = 0\} + \Phi_e^* l_3 + \Phi_e^* C.$$

Por comparação de graus segue a igualdade

$$\Delta_{\mathcal{H}} = \{x = 0\} + \{y = 0\} + \{z = 0\} + \Phi_e^* l_3 + \Phi_e^* C.$$

Assim, segue que \mathcal{H} é uma folheação de grau $e + 1$ com $\Delta_{\mathcal{H}}$ reduzido o que encerra a demonstração. \square

Observação 5.3.5. *Na demonstração do Teorema B vimos que podemos encontrar uma folheação \mathcal{F} de grau 2 em \mathbb{P}_k^2 não p -fechada com p -divisor da forma*

$$\Delta_{\mathcal{F}} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + C$$

onde C é uma curva irredutível de grau p e $l_i \neq l_j$ se $i \neq j$. Sejam $P, Q \in \mathbb{P}_k^2$ e fixe $\Phi : \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ um automorfismo tal que $\Phi(P), \Phi(Q) \notin C$. Então, $\Phi^* \mathcal{F}$ é uma folheação não p -fechada com p -divisor

$$\Delta_{\Phi^* \mathcal{F}} = \Phi^* l_1 + \Phi^* l_2 + \Phi^* l_3 + \Phi^* l_4 + \Phi^* C$$

onde $\Phi^* C$ é uma curva irredutível de grau p tal que $P, Q \notin \Phi^* C$.

5.4 p -divisor em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$

No que segue fixamos x_0, x_1 (resp. y_0, y_1) como funções coordenadas do primeiro fator (resp. segundo fator) de $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$. Sejam π_1 a projeção de $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ sobre o primeiro fator e π_2 a projeção de $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ sobre o segundo fator. Sejam F e M fibras de π_1 e π_2 respectivamente. Relembre que $\{F, M\}$ forma uma base de $\text{Num}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1)$ satisfazendo as seguintes condições numéricas

$$F^2 = 0 \quad , \quad F \cdot M = 1 \quad , \quad M^2 = 0.$$

Observe ainda que para quaisquer outras fibras $F_0 = \pi_1^{-1}(\text{pt})$ e $M_0 = \pi_2^{-1}(\text{pt})$ temos $F_0 \equiv F$ e $M_0 \equiv M$.

Lema 5.4.1. *Sejam $C = \mathcal{Z}(f) \subset \mathbb{A}_k^2$ uma curva irredutível de grau d e $f = f_k + f_{k+1} + \dots + f_d$ a decomposição de f em termos homogêneos como elemento de $k[x, y]$. Suponha que x^d e y^d ocorrem efetivamente em f_d e considere \bar{C} a bi-projetivização de C em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ via o*

isomorfismo:

$$\begin{aligned} \Phi: U_{11} &\longrightarrow \mathbb{A}_k^2 \\ ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) &\mapsto \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{y_0}{y_1} \right). \end{aligned}$$

Então, \overline{C} é irredutível e se $\{F, M\}$ é uma base de $\text{Num}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1)$, com $F^2 = 0$, $F \cdot M = 1$ e $M^2 = 0$ temos

$$\overline{C} \equiv \text{deg}(C)(F + M).$$

Demonstração. A compactificação \overline{C} é definida pela saturação da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Phi^* f &= f_k \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{y_0}{y_1} \right) + f_{k+1} \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{y_0}{y_1} \right) + \cdots + f_d \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{y_0}{y_1} \right) \\ &= (x_1 y_1)^{-d} \left((x_1 y_1)^{d-k} f_k(x_0 y_1, x_1 y_0) + (x_1 y_1)^{d-k-1} f_{k+1}(x_0 y_1, x_1 y_0) + \cdots + f_d(x_0 y_1, x_1 y_0) \right). \end{aligned}$$

Assim, \overline{C} é definida pelo polinômio:

$$F = (x_1 y_1)^{d-k} f_k(x_0 y_1, x_1 y_0) + (x_1 y_1)^{d-k-1} f_{k+1}(x_0 y_1, x_1 y_0) + \cdots + f_d(x_0 y_1, x_1 y_0)$$

Não é difícil verificar que F é um polinômio bihomogêneo de bigrau (d, d) , de modo que resta checar a irredutibilidade. Por outro lado, note que se existir um fator irredutível H de F então necessariamente devemos ter $H \notin \langle x_1 y_1 \rangle$ já que a hipótese em f_d implica que $f_d(x_0 y_1, x_1 y_0) \notin \langle x_1 y_1 \rangle$. Mas, especializando para $x_1 = 1, y_1 = 1$ resulta que f é redutível. Contradição! \square

Exemplo 5.4.2. Seja C a curva afim em \mathbb{A}_k^2 definida pela equação $f = x + y + xy$. Usando o mapa

$$\begin{aligned} \Phi: U_{11} &\longrightarrow \mathbb{A}_k^2 \\ ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) &\mapsto \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{y_0}{y_1} \right) \end{aligned}$$

e projetivizando C em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ via Φ obtemos a curva $\overline{C} = \mathcal{Z}(x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_0 y_0)$ de bigrau $(1, 1) \neq (2, 2)$, o que mostra que a condição do lema acima é necessária.

Teorema 5.4.3. Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Então, uma folheação genérica em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com fibrado normal $N \equiv (d_1 + 2)F + (d_2 + 2)M$ possui p -divisor não nulo e reduzido. Mais precisamente, $U(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1}(F + M), N) \neq \emptyset$ se

- $N \cdot F - 2 \geq 0$ e $p \nmid N \cdot F - 2$ (se não nulo)
- $\text{deg}(N) - N \cdot F + d - 2 \geq 0$ e $p \nmid \text{deg}(N) - N \cdot F - 2$ (se não nulo).

A prova do Teorema 5.4.3 será dividida em proposições. Vamos mostrar que dados dados $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d_i$ (se $d_i \neq 0$) podemos encontrar uma folheação \mathcal{G} em $\Sigma_0 = \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com as seguintes propriedades:

- (i) $K_{\mathcal{G}} \equiv d_1 F_0 + d_2 M_0$ onde $F_0 = \{x_0 = 0\}$ e $M_0 = \{y_0 = 0\}$.
- (ii) F_0 e $M = \{y_1 = 0\}$ são curvas \mathcal{G} -invariantes com $\{Q\} = F_0 \cap M$ sendo uma singularidade p -reduzida de \mathcal{G} .
- (iii) O p -divisor $\Delta_{\mathcal{G}}$ é reduzido.

Vamos considerar os seguintes casos:

- **Caso A:** $K_{\mathcal{G}} \equiv d_1 F_0 + d_2 M_0$ com

$$(d_1, d_2) \in \{(0, 0)\} \cup \{(l, 0) \in \mathbb{Z}^2 \mid l > 0 \text{ e } p \nmid l\} \cup \{(0, l) \in \mathbb{Z}^2 \mid l > 0 \text{ e } p \nmid l\}.$$

- **Caso B:** $K_{\mathcal{G}} \equiv d_1 F_0 + d_2 M_0$ com

$$(d_1, d_2) \in \{(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid l_1, l_2 > 0 \text{ e } p \nmid l_1 l_2\}.$$

5.4.1 Caso A

Nesta subseção provamos, em particular, que uma folheação genérica \mathcal{G} em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com fibrado cotangente $K_{\mathcal{G}} \equiv d_1 F_0 + d_2 M_0$ possui p -divisor reduzido quando

$$(d_1, d_2) \in \{(0, 0)\} \cup \{(l, 0) \in \mathbb{Z}^2 \mid l > 0 \text{ e } p \nmid l\} \cup \{(0, l) \in \mathbb{Z}^2 \mid l > 0 \text{ e } p \nmid l\}.$$

Começamos com o caso $d_1 = d_2 = 0$.

Proposição 5.4.4. *Uma folheação genérica em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com fibrado cotangente trivial $K_{\mathcal{G}} \equiv 0$ satisfaz (i), (ii) e (iii).*

Demonstração. Seja ω uma 1-forma em \mathbb{A}_k^2 dada por

$$\omega = \alpha y dx + x dy \quad \alpha \notin \mathbb{F}_p.$$

Encare \mathbb{A}_k^2 como um aberto de $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ via o isomorfismo

$$\Phi : U_{11} \longrightarrow \mathbb{A}_k^2 \quad ([x_0, x_1], [y_0, y_1]) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{y_0}{y_1} \right)$$

onde $U_{11} = \{y_1 \neq 0\} \cap \{x_1 \neq 0\} \subset \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$. Compactificando a 1-forma ω em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ por meio da aplicação Φ , obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi^* \omega &= \alpha \left(\frac{y_0}{y_1} \right) \left(\frac{x_1 dx_0 - x_0 dx_1}{x_1^2} \right) + \left(\frac{x_0}{x_1} \right) \left(\frac{y_1 dy_0 - y_0 dy_1}{y_1^2} \right) \\ &= \frac{\alpha y_0 x_1 dx_0 - \alpha y_0 x_0 dx_1}{x_1^2 y_1} + \frac{x_0 y_1 dy_0 - y_0 x_0 dy_1}{x_1 y_1^2} \end{aligned}$$

e considerando a saturação da 1-forma acima obtemos

$$\Omega = \alpha x_1 y_0 y_1 dx_0 - \alpha x_0 y_0 y_1 dx_1 + x_0 x_1 y_1 dy_0 - x_0 x_1 y_0 dy_1$$

uma 1-forma projetiva bihomogênea que define uma folheação \mathcal{F}_{Ω} com $K_{\mathcal{F}_{\Omega}} \equiv 0$. Em particular, satisfaz (i). Note que $F_0, F_1 = \{x_1 = 0\}$, $M = \{y_1 = 0\}$ e M_0 são curvas \mathcal{F}_{Ω} -invariantes e assim

$$\Delta_{\mathcal{F}_{\Omega}} \geq M_0 + M + F_1 + F_2.$$

Por outro lado, temos

$$\Delta_{\mathcal{F}_{\Omega}} \equiv pK_{\mathcal{F}} + N_{\mathcal{F}} \equiv N_{\mathcal{F}} \equiv 2F_0 + 2M_0$$

e por comparação de graus resulta a igualdade

$$\Delta_{\mathcal{F}_\Omega} = M_0 + M + F_1 + F_2.$$

Em particular, \mathcal{F}_Ω satisfaz (iii). Agora, seja U_{10} o aberto dado por $\{y_0 \neq 0\} \cap \{x_1 \neq 0\}$. Observe que existe um isomorfismo

$$\begin{aligned} \psi: U_{10} &\longrightarrow \mathbb{A}_k^2 \\ ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) &\mapsto \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{y_1}{y_0} \right) = (x, y). \end{aligned}$$

Restringindo a folheação \mathcal{F}_Ω ao aberto $U_{10} \cong \mathbb{A}_k^2$ obtemos uma folheação dada pela 1-forma:

$$\sigma = \alpha y dx - x dy$$

e assim temos que $M \cap F_0 = \{y = 0\} \cap \{x = 0\} = \{(0, 0)\}$ é uma singularidade p -reduzida. Logo \mathcal{F}_Ω satisfaz (ii). Concluimos assim a prova no caso $d_2 = d_1 = 0$. \square

Passemos agora ao caso mais geral.

Proposição 5.4.5. *Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Suponha que*

$$(d_1, d_2) \in \{(0, 0)\} \cup \{(l, 0) \in \mathbb{Z}^2 \mid l > 0 \text{ e } p \nmid l\} \cup \{(0, l) \in \mathbb{Z}^2 \mid l > 0 \text{ e } p \nmid l\}.$$

Então, uma folheação genérica em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com fibrado cotangente $K_{\mathcal{G}} \equiv d_1 F + d_2 M$ satisfaz (i), (ii) e (iii).

Demonstração. O caso $d_1 = d_2 = 0$ foi tratado na proposição anterior. Consideremos agora o caso em que $d_1 = l$ e $d_2 = 0$ para $l > 0$ com $p \nmid l$. Pela simetria do problema estaremos paralelamente considerando o caso em que $d_1 = 0$ e $d_2 = l$ para $l > 0$ com $p \nmid l$.

- **Caso $l = 1$:** Seja \mathcal{F} uma folheação de Riccati com respeito a primeira projeção

$$\pi_1 : \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1 \longrightarrow \mathbb{P}_k^1.$$

Relembre (ver [4, Chapter 4, Section 1]) que uma tal folheação é definida como sendo uma folheação em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ cuja fibra geral F de π_1 é transversa a \mathcal{F} . Suponha que

- \mathcal{F} deixa apenas tres fibras da primeira projeção π_1 invariantes. Denote tais fibras por F_0, F_1, F_2 .
- \mathcal{F} deixa apenas uma fibra da segunda projeção π_2 invariante. Denote tal fibra por M .
- As interseções $\{Q_i\} = F_i \cap M$ são singularidades p -reduzidas.

Vamos mostrar que uma tal folheação satisfaz (i), (ii) e (iii). Note que por (a) temos que (veja [4, Section 1, Chapter 4])

$$K_{\mathcal{F}} = \pi_1^* K_{\mathbb{P}_k^1} + F_0 + F_1 + F_2 \equiv -2F + 3F = F.$$

Assim, \mathcal{F} satisfaz (i). Observe ainda que (c) garante que \mathcal{F} é não p -fechada (ver Lema 5.2.6) e que \mathcal{F} satisfaz (ii), módulo uma mudança de coordenadas. Vamos mostrar

agora que \mathcal{F} satisfaz (iii). Observe que

$$D = \Delta_{\mathcal{F}} - F_0 - F_1 - F_3 - M \geq 0$$

e por (b) garantimos que $\text{ord}_M(\Delta_{\mathcal{F}}) = \text{ord}_{F_i}(\Delta_{\mathcal{F}}) = 1$ para todo i (veja [36, Fact 2.8]). Como $\Delta_{\mathcal{F}} = pK_{\mathcal{F}} + N_{\mathcal{F}} \equiv pF_0 + 3F_0 + 2M_0 \equiv (p+2)F_0 + 2M_0$, temos que

$$D \cdot F = \Delta_{\mathcal{F}} \cdot F - M \cdot F = 2 - 1 = 1.$$

Assim existe uma curva irredutível $C \leq D$ tal que $C \cdot F = 1$. Escreva $D = C + R$ e note que temos $C \equiv uF_0 + M_0$ e $R \equiv vF_0$, para alguns $u, v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Vamos mostrar que $v \equiv 0 \pmod{p}$. Suponha por contradição que $v \neq 0$. Então, como $R \equiv vF_0$ concluímos pela Proposição 3.3.11 que existe uma fibra da primeira projeção, $F_4 \leq R$, que é \mathcal{F} -invariante. Por outro lado, pela construção de \mathcal{F} sabemos que as únicas fibras \mathcal{F} -invariantes são F_0, F_1 e F_2 . Além disso, todas as fibras ocorrem com multiplicidade 1 em $\Delta_{\mathcal{F}}$. Logo, uma tal fibra F_4 não pode existir e assim concluímos que $v \equiv 0 \pmod{p}$. Por outro lado, temos

$$u + v = C \cdot M_0 + R \cdot M_0 = D \cdot M_0 = \Delta_{\mathcal{F}} \cdot M_0 - 3 = p + 3 - 3 = p.$$

Assim, se $v \neq 0$ a condição $v \equiv 0 \pmod{p}$ implica que $v = p$ e por conseguinte $u = 0$. Daí teríamos $C \equiv M$ e assim C seria uma fibra da segunda projeção que é \mathcal{F} -invariante. Mas isso é uma contradição, já que pela construção sabemos que M é a única fibra da segunda projeção que é \mathcal{F} -invariante e satisfaz $\text{ord}_M(\Delta_{\mathcal{F}}) = 1$. Logo, $v = 0$ e C é uma curva irredutível \mathcal{F} -invariante com $C \equiv pF_0 + M_0$ e \mathcal{F} possui p -divisor dado por

$$\Delta_{\mathcal{F}} = F_0 + F_1 + F_2 + M + C$$

que é reduzido. Assim, \mathcal{F} satisfaz (i),(ii) e (iii) e concluímos o argumento para o caso $d_1 = 1$ e $d_2 = 0$.

- **Caso $l > 0$ e $p \nmid l$:** Vamos usar o caso em que $l = 1$ para estudar o presente caso. Seja \mathcal{F} uma folheação em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ como no caso anterior. Como demonstrado acima, uma folheação genérica satisfazendo (a),(b) e (c) possui p -divisor na forma

$$\Delta_{\mathcal{F}} = F_0 + F_1 + F_3 + M + C$$

onde C é uma curva irredutível tal que $C \equiv pF_0 + M_0$, F_0, F_1 e F_2 são fibras da primeira projeção π_1 e M é fibra da segunda projeção π_2 .

Seja $\Phi : \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ um morfismo finito ramificado de grau l com divisor de ramificação R . Suponha ainda que Φ se ramifica apenas ao longo das curvas F_0, F_1 . Seja $\mathcal{G} = \Phi^* \mathcal{F}$ a folheação definida pelo Pull-back de \mathcal{F} por Φ . Concretamente, se Ω é a 1-forma projetiva bihomogênea que define \mathcal{F} então \mathcal{G} é a folheação definida pela saturação de $\Phi^* \Omega$. Observe que como F_0 e F_1 são \mathcal{F} -invariantes temos que $K_{\mathcal{G}} = \Phi^* K_{\mathcal{F}}$. Assim, $\Phi^* K_{\mathcal{F}} = \Phi^* F = lF$ e por conseguinte \mathcal{G} satisfaz (i) e temos $N_{\mathcal{G}} \equiv (l+2)F + 2M$ e $\Delta_{\mathcal{G}} \equiv pK_{\mathcal{G}} + N_{\mathcal{G}} \equiv (pl+l+2)F + 2M$. Pelo Lema 5.3.1 sabemos que $\Phi^* C$ e $\Phi^* F_2$ são curvas reduzidas que não admitem componentes irredutíveis em comum. Em particular, temos que

$$\Delta_{\mathcal{G}} \geq \Phi^* C + \Phi^* F_2 + F_1 + F_0 + M.$$

Por outro lado,

$$\Phi^*C \equiv \Phi^*(pF + M) \equiv plF + M \quad \Phi^*F_2 = lF$$

e daí

$$\Phi^*C + \Phi^*F_2 + F_0 + F_1 + M \equiv (pl + l + 2)F + 2M$$

e por comparação de graus obtemos a seguinte igualdade

$$\Delta_{\mathcal{G}} = \Phi^*C + \Phi^*F_2 + F_1 + F_0 + M.$$

Em particular, $\Delta_{\mathcal{G}}$ é um divisor reduzido e \mathcal{G} satisfaz (iii). Vamos mostrar agora que \mathcal{G} satisfaz (ii). Para isso, seja Q o ponto em $F_0 \cap M$. Pelo caso anterior, mais precisamente, por (c) sabemos que Q é uma singularidade p -reduzida. Fixe U um aberto afim em torno de $Q = (0, 0)$ tal que $\Phi|_{\Phi^{-1}(U)} : \Phi^{-1}(U) \rightarrow U$ é definida localmente por $\Phi : (x, y) \mapsto (x^l, y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ e \mathcal{F} é dada pela 1-forma

$$\omega = \alpha \tilde{y} d\tilde{x} - \tilde{x} d\tilde{y} + O(2).$$

Então, $\Phi^*\mathcal{F}$ é dada sobre $\Phi^{-1}(U)$ pela a 1-forma

$$\sigma = l\alpha y dx - x dy + O(2).$$

Como estamos assumindo que Q é uma singularidade p -reduzida temos que $\alpha \notin \mathbb{F}_p$ e por conseguinte $l\alpha \notin \mathbb{F}_p$. Logo, \mathcal{G} admite $\{Q\} = F \cap M$ como singularidade p -reduzida e assim satisfaz (ii). Isso encerra a prova do caso $d_1 = l > 1$ com $p \nmid l$ e $d_2 = 0$.

Os casos acima encerram a demonstração da proposição. □

5.4.2 Caso B

Nesta subsecção mostramos que uma folheação genérica \mathcal{G} em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com fibrado cotangente $K_{\mathcal{G}} \equiv d_1F + d_2M$ satisfaz

- (i) $K_{\mathcal{G}} \equiv d_1F_0 + d_2M_0$ onde $F_0 = \{x_0 = 0\}$ e $M_0 = \{y_0 = 0\}$.
- (ii) F_0 e $M = \{y_1 = 0\}$ são curvas \mathcal{G} -invariantes com $\{Q\} = F_0 \cap M$ sendo uma singularidade p -reduzida de \mathcal{G} .
- (iii) O p -divisor $\Delta_{\mathcal{G}}$ é reduzido.

quando

$$(d_1, d_2) \in \{(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid l_1, l_2 > 0 \text{ e } p \nmid l_1 l_2\}.$$

Começamos com o caso $d_1 = d_2 = 1$.

Proposição 5.4.6. *Uma folheação genérica em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com fibrado cotangente $K_{\mathcal{G}} \equiv F + M$ satisfaz (i), (ii) e (iii).*

Demonstração. De fato, sobre o aberto U_{11} considere a folheação definida pela 1-forma:

$$\omega = ydx - xdy + \tilde{b}(x, y)dx + \tilde{a}(x, y)dy$$

Na prova do Teorema B, vimos que para uma escolha genérica de $\tilde{a}, \tilde{b} \in k[x, y]_2$ a 1-forma ω define uma folheação com p -divisor reduzido em \mathbb{A}_k^2 dado explicitamente por

$$\Delta = l_1 + l_2 + l_3 + C$$

onde l_1, l_2, l_3 são retas distintas passando por $(0, 0)$ e C é uma curva irredutível que passa por $(0, 0)$ de grau p e com multiplicidade $p - 1$ sobre $(0, 0)$. Além disso, pela Observação 5.3.5 podemos supor ainda que C não passa pelos pontos $\{[0 : 1 : 0], [1 : 0 : 0]\}$. Para simplificar as computações que serão realizadas abaixo, iremos supor que $l_1 = \{x = 0\}$, $l_2 = \{y = 0\}$ e $l_3 = \{ux + vy = 0\}$ para algumas constantes não nulas $u, v \in k$. Nesse caso, temos $\tilde{a}(x, y) = xa(x, y)$ e $\tilde{b}(x, y) = yb(x, y)$ para alguns $a, b \in k[x, y]_1$.

Usando o isomorfismo $\phi : U_{11} \rightarrow \mathbb{A}_k^2$ que associa $([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{y_0}{y_1}\right)$ podemos compactificar ω para uma folheação em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$. Nesse caso, a mesma será dada explicitamente pela 1-forma:

$$\Omega = A_0 dx_0 + A_1 dx_1 + B_0 dy_0 + B_1 dy_1$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= x_1 y_0 y_1 (x_1 y_1 + b(x_0 y_1, x_1 y_0)), \\ A_1 &= -x_0 y_0 y_1 (x_1 y_1 + b(x_0 y_1, x_1 y_0)), \\ B_0 &= x_0 x_1 y_1 (-x_1 y_1 + a(x_0 y_1, x_1 y_0)), \\ B_1 &= -x_0 x_1 y_0 (-x_1 y_1 + a(x_0 y_1, x_1 y_0)). \end{aligned}$$

A 1-forma projetiva Ω define uma folheação \mathcal{F}_Ω em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ tal que

$$K_{\mathcal{F}_\Omega} \equiv F + M$$

e assim \mathcal{F}_Ω satisfaz (i). Afirmamos que $\Delta_{\mathcal{F}_\Omega}$ é reduzido. De fato, note que

$$\Delta_{\mathcal{F}_\Omega} \equiv pK_{\mathcal{F}_\Omega} + N_{\mathcal{F}_\Omega} \equiv p(F + M) + (3F + 3M) = (p + 3)(F + M).$$

Pela equação homogênea de \mathcal{F}_Ω , vemos que $F_0 = \{x_0 = 0\}$, $F_1 = \{x_1 = 0\}$, $M_0 = \{y_0 = 0\}$ e $M = \{y_1 = 0\}$ são \mathcal{F}_Ω -invariantes. Além disso, bi-projetivizando a reta L via Φ em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ sabemos pelo Lema 5.4.1 que a curva obtida, \bar{L} , é irredutível \mathcal{F}_Ω -invariante com

$$\bar{L} \equiv F_0 + M_0.$$

Como C não passa pelos pontos $\{[0 : 1 : 0], [1 : 0 : 0]\}$ podemos aplicar o Lema 5.4.1 para concluir que a curva irredutível de grau p em \mathbb{A}_k^2 projetiviza a uma curva irredutível \bar{C} em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ que é \mathcal{F}_Ω -invariante tal que:

$$\bar{C} \equiv p(F_0 + M_0).$$

Daí obtemos

$$\Delta_{\mathcal{F}_\Omega} = F_0 + F_1 + M_0 + M + \bar{L} + \bar{C}$$

e assim garantimos que $\Delta_{\mathcal{F}_\Omega}$ é um divisor reduzido. Isso mostra que \mathcal{F} satisfaz (iii).

Observe que restringindo a folheação ao aberto $U_{10} = \{y_0 \neq 0\} \cap \{x_1 \neq 0\}$ temos uma

folheação em \mathbb{A}_k^2 dada pela 1-forma

$$\sigma = y_1(y_1 + b(x_0y_1, 1))dx_0 - x_0(-y_1 + a(x_0y_1, 1))dy_1.$$

Como $a, b \in k[x, y]_1$ são genéricos, podemos supor ainda que $a(x_0y_1, 1) = a_0 + O(2)$ e $b(x_0y_1, 1) = b_0 + O(2)$ onde $a_0/b_0 \notin \mathbb{F}_p$, de modo que obtemos uma folheação em Σ_0 satisfazendo (i), (ii) e (iii) com $d_1 = d_2 = 1$. \square

Usando a proposição anterior podemos considerar o caso geral.

Proposição 5.4.7. *Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Suponha que*

$$(d_1, d_2) \in \{(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid l_1, l_2 > 0 \text{ e } p \nmid l_1l_2\}.$$

Então, uma folheação genérica em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com fibrado cotangente $K_{\mathcal{G}} \equiv d_1F + d_2M$ satisfaz (??), (ii) e (iii).

Demonstração. Seja $l \in \mathbb{N}$ inteiro positivo coprimo a p e considere o mapa finito:

$$\begin{aligned} \Phi_l: \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1 &\longrightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1 \\ ([x_0, x_1], [y_0, y_1]) &\mapsto ([x_0^l : x_1^l], [y_0 : y_1]). \end{aligned}$$

Sejam R_{Φ_l} o divisor ramificação e \mathcal{G} a folheação em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ descrita pela saturação da 1-forma $\Phi_l^* \Omega$, onde Ω é a projetivização da 1-forma em \mathbb{A}_k^2 dada por

$$\sigma = y_1(y_1 + b(x_0y_1, 1))dx_0 - x_0(-y_1 + a(x_0y_1, 1))dy_1$$

onde $a, b \in k[x, y]_1$ são genéricos com $a(x_0y_1, 1) = a_0 + O(2)$, $b(x_0y_1, 1) = b_0 + O(2)$ e $a_0/b_0 \notin \mathbb{F}_p$. Relembre que pela Proposição 5.4.6 podemos supor que a folheação definida por Ω , \mathcal{F}_Ω , é não p -fechada com p -divisor dado por

$$\Delta_{\mathcal{F}_\Omega} = F_0 + F_1 + M_0 + M + \bar{L} + \bar{C}$$

onde $F_0 = \{x_0 = 0\}$, $F_1 = \{x_1 = 0\}$, $M_0 = \{y_0 = 0\}$, $M = \{y_1 = 0\}$ e com \bar{L}, \bar{C} curvas irredutíveis tais que

$$\bar{C} \equiv p(F_0 + M_0) \quad \text{e} \quad \bar{L} \equiv F_0 + M_0.$$

Temos $R_{\Phi_l} = (l-1)F_0 + (l-1)F_1 \equiv 2(l-1)F_0$ e como F_0 e F_1 são \mathcal{F}_Ω -invariantes resulta $K_{\mathcal{G}} = \Phi^* K_{\mathcal{F}} = \Phi^*(F + M) = lF + M$. Concretamente, a folheação \mathcal{G} é definida pela 1-forma:

$$\gamma = \tilde{A}_0 dx_0 + \tilde{A}_1 dx_1 + \tilde{B}_0 dy_0 + \tilde{B}_1 dy_1$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0 &= lx_1y_0y_1(x_1^l y_1 + b(x_0^l y_1, x_1^l y_0)), \\ \tilde{A}_1 &= -lx_0y_0y_1(x_1^l y_1 + b(x_0^l y_1, x_1^l y_0)), \\ \tilde{B}_0 &= x_0x_1y_1(-x_1^l y_1 + a(x_0^l y_1, x_1^l y_0)), \\ \tilde{B}_1 &= -x_0x_1y_0(-x_1^l y_1 + a(x_0^l y_1, x_1^l y_0)). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que vale a seguinte igualdade

$$\Delta_{\mathcal{G}} = F_0 + F_1 + M_0 + M + \Phi_l^* \bar{L} + \Phi_l^* \bar{C}.$$

Note inicialmente que as curvas $\Phi_l^* \bar{L}$ e $\Phi_l^* \bar{C}$ são \mathcal{G} -invariantes. De fato, como $\text{mdc}(l, p) = 1$ e x_0, x_1 não dividem as equações que definem \bar{L} e \bar{C} , usando o Lema 5.3.1 concluímos que $\Phi_l^* \bar{L}$ e $\Phi_l^* \bar{C}$ são reduzidos com componentes irredutíveis distintas. Em particular, segue que $\Phi_l^* \bar{L}$ e $\Phi_l^* \bar{C}$ são \mathcal{G} -invariantes (ver Proposição 3.3.11). Como F_0, F_1, M_0, M são \mathcal{G} -invariantes temos que

$$\Delta_{\mathcal{G}} \geq F_0 + F_1 + M_0 + M + \Phi_l^* \bar{L} + \Phi_l^* \bar{C}.$$

Agora, note que $\Delta_{\mathcal{G}}$ é um divisor de bigrau dado pela fórmula:

$$pK_{\mathcal{G}} + N_{\mathcal{G}} \equiv p(lF_0 + M_0) + ((l+2)F_0 + 3M_0) \equiv (pl + l + 2)F_0 + (p+3)M_0.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} F_0 + F_1 + M_0 + M + \Phi_l^* \bar{L} + \Phi_l^* \bar{C} &\equiv F_0 + F_0 + M_0 + M_0 + (lF_0 + M_0) + (plF_0 + pM_0) \\ &= (pl + l + 2)F_0 + (p+3)M_0. \end{aligned}$$

Assim, por comparação de bigraus, concluímos que vale a igualdade

$$\Delta_{\mathcal{G}} = F_0 + F_1 + M_0 + M + \Phi_l^* \bar{L} + \Phi_l^* \bar{C}.$$

o que demonstra que \mathcal{G} satisfaz (iii).

Resta mostrar que $F_0 \cap M = \{x_0 = 0\} \cap \{y_1 = 0\}$ é uma singularidade p -reduzida de \mathcal{G} . De fato, restringindo a folheação \mathcal{G} ao aberto U_{10} temos uma folheação em \mathbb{A}_k^2 dada pela 1-forma

$$\omega = ly(y + b(x^l y, 1))dx - x(-y + a(x^l y, 1))dy$$

e assim garantimos que $(0, 0)$ é p -reduzida já que estamos supondo $a(x_0 y_1, 1) = a_0 + O(2)$ e $b(x_0 y_1, 1) = b_0 + O(2)$ com $a_0/b_0 \notin \mathbb{F}_p$. Por simetria, isto é, trocando F_0 por M_0 , segue que dados $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ com $p \nmid d_i$ (se $d_i \neq 0$) podemos construir folheações em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com as seguintes propriedades:

- (i) $K_{\mathcal{G}} \equiv d_1 F_0 + d_2 M_0$ onde F_0 e M_0 são fibras da primeira e segunda projeção respectivamente.
- (ii) F_0 e M_0 são \mathcal{G} -invariantes e $\{Q\} = F_0 \cap M_0$ é uma singularidade p -reduzida de \mathcal{G} .
- (iii) $\Delta_{\mathcal{G}}$ é um divisor reduzido.

Isso encerra a prova da proposição. □

Considerando a junção dos casos A e B obtemos a prova para o Teorema 5.4.3.

5.5 Folheações e p -divisor em Σ_d ($d \geq 0$)

Começamos relembando certas construções sobre folheações em superfícies de Hirzebruch. Mais detalhes podem ser encontrados em [18].

Seja $\mathbb{G}_m = k^*$ o grupo multiplicativo de k e $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Seja μ_d a ação de \mathbb{G}_m^2 em $X = (\mathbb{A}_k^2 - 0) \times (\mathbb{A}_k^2 - 0)$ definida pela morfismo:

$$\begin{aligned} \mu_d : \mathbb{G}_m^2 \times X &\longrightarrow X \\ ((a, b), (x_0, x_1; y_0, y_1)) &\mapsto (ax_0, ax_1, by_0, \frac{b}{a^d}y_1). \end{aligned}$$

O quociente $\Sigma_d = X/\mu_d$ é uma superfície lisa definida sobre k e isomorfa a d -superfície de Hirzebruch (ver Capítulo 2). É uma superfície regradada com morfismo estrutural para \mathbb{P}_k^1 definido por

$$\begin{aligned} \pi : \Sigma_d &\longrightarrow \mathbb{P}_k^1 \\ \overline{(x_0, x_1; y_0, y_1)} &\mapsto [x_0 : x_1]. \end{aligned}$$

Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$ e $G \in k[x_0, x_1, y_0, y_1]$. Dizemos que G é bihomogêneo de bigrau (d_1, d_2) se para qualquer monômio $x_0^{a_0} x_1^{a_1} y_0^{b_0} y_1^{b_1}$ no suporte de G temos que

$$d_1 = a_0 + a_1 - db_1 \quad d_2 = b_0 + b_1.$$

Sejam F e M_d curvas em Σ_d tais que F é uma fibra da projeção estrutural $\pi : \Sigma_d \longrightarrow \mathbb{P}_k^1$ e M_d é uma seção de π satisfazendo as condições

$$M_d \cdot F = 1 \quad M_d^2 = d.$$

Temos que $\{F, M_d\}$ forma uma base de $\text{Num}_{\mathbb{Q}}(\Sigma)$. Se $D \in \text{Div}(\Sigma_d)$ é tal que $D \equiv d_1 F + d_2 M_d$ então as seções globais não nulas de $\mathcal{O}_{\Sigma_d}(D)$ correspondem a polinômios bihomogêneos de bigrau (d_1, d_2) em Σ_d . No que se segue usaremos o seguinte resultado.

Proposição 5.5.1. *Sejam $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$. Seja $N = \mathcal{O}_{\Sigma_d}(d_1 - d + 2, d_2 + 2)$. Então, qualquer folheação \mathcal{F} em Σ_d com fibrado normal N é unicamente determinada, módulo multiplicação de elementos de k , por uma 1-forma diferencial do tipo*

$$\Omega = A_0 dx_0 + A_1 dx_1 + B_0 dy_0 + B_1 dy_1$$

onde $A_0, A_1 \in H^0(\Sigma_d, \mathcal{O}(d_1 - d + 1, d_2 + 2))$, $B_0 \in H^0(\Sigma_d, \mathcal{O}_{\Sigma_d}(d_1 - d + 2, d_2 + 1))$ e $B_1 \in H^0(\Sigma_d, \mathcal{O}_{\Sigma_d}(d_1 + 2, d_2 + 1))$ são bihomogêneos e satisfazem as seguintes condições:

$$x_0 A_0 + x_1 A_1 - dy_1 B_1 = 0,$$

$$y_0 B_0 + y_1 B_1 = 0.$$

Demonstração. Ver a Proposição 2.2.8 ou [18, Proposition 3.2]. □

5.5.1 p -divisor em Σ_d

Seja $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Sejam M_d uma seção da projeção natural $\pi : \Sigma_d \longrightarrow \mathbb{P}_k^1$ e F uma fibra de π tais que

$$M_d^2 = d \quad M_d \cdot F = 1.$$

As curvas M_d e F formam uma base de $\text{Num}_{\mathbb{Q}}(\Sigma_d)$. Observe que para qualquer outro divisor $D \in \text{Div}(\Sigma_d)$ tal que $\langle D, F \rangle = \text{Num}_{\mathbb{Q}}(\Sigma_d)$ e satisfazendo $D^2 = d$ e $D \cdot F = 1$ temos que

$D \equiv M_d$. Com efeito, escreva $D = aM_d + bF$ para alguns $a, b \in \mathbb{Q}$ e note que $1 = D \cdot F = a$ e $d = D^2 = a^2d + 2ab = d + 2b$ e daí $b = 0$.

Fixe $\{F, M_d\}$ como base de $\text{Num}_{\mathbb{Q}}(\Sigma_d)$ e seja Q o ponto na interseção $F \cap M$, onde $M = \{y_1 = 0\}$ é a curva em Σ_d de auto-interseção negativa, isto é, $M^2 = -d$. Seja

$$Bl_Q : Bl_Q(\Sigma_d) \longrightarrow \Sigma_d$$

a explosão de Σ_d sobre Q e

$$c_{\tilde{F}} : Bl_Q(\Sigma_d) \longrightarrow \Sigma_{d+1}$$

o mapa que consiste na contração da transformada estrita de F em $Bl_Q(\Sigma_d)$. Seja \overline{E} o divisor excepcional associado a Bl_Q e

$$\Phi_d^{d+1} : \Sigma_{d+1} \dashrightarrow \Sigma_d$$

o mapa racional que consiste na composição dos mapas birracionais:

$$\Phi_d^{d+1} = Bl_Q \circ c_{\tilde{F}}^{-1} : \Sigma_{d+1} \dashrightarrow Bl_Q(\Sigma_d) \longrightarrow \Sigma_d.$$

Seja \tilde{M}_{d+1} a transformada estrita de M_d em $Bl_Q(\Sigma_d)$ e considere $E = (c_{\tilde{F}})_* \overline{E}$ e $M_{d+1} = (c_{\tilde{F}})_* \tilde{M}_{d+1}$ as curvas induzidas pela contração. Observe que $\{E, M_{d+1}\}$ forma uma base de $\text{Num}_{\mathbb{Q}}(\Sigma_d)$ satisfazendo as condições

$$E^2 = 0 \quad E \cdot M_{d+1} = 1 \quad M_{d+1}^2 = d + 1.$$

Lema 5.5.2. *Se \mathcal{F} é uma folheação em Σ_d com*

$$K_{\mathcal{F}} \equiv d_1 F + d_2 M_d$$

então $\mathcal{G} = (\Phi_d^{d+1})^* \mathcal{F}$ é uma folheação em Σ_{d+1} com

$$K_{\mathcal{G}} \equiv (d_1 - l(Q) + 1)E + d_2 M_{d+1}.$$

Demonstração. Seja $\mathcal{H} = Bl_Q^* \mathcal{F}$ a folheação induzida em $Bl_Q(\Sigma_d)$. Então, $K_{\mathcal{G}} = (c_{\tilde{F}})_* K_{\mathcal{H}}$ e temos

$$K_{\mathcal{H}} = Bl_Q^* K_{\mathcal{F}} + (1 - l(Q))E \equiv Bl_Q^*(d_1 F + d_2 M_d) + (1 - l(Q))\overline{E}.$$

Como $Bl_Q^* F = \tilde{F} + \overline{E}$ e $Bl_Q^* M_d = \tilde{M}_{d+1}$, concluímos

$$K_{\mathcal{H}} \equiv d_1 \tilde{F} + d_2 \tilde{M}_{d+1} + (d_1 - l(Q) + 1)\overline{E}.$$

Assim,

$$K_{\mathcal{G}} = (c_{\tilde{F}})_* K_{\mathcal{H}} \equiv (d_1 - l(Q) + 1)(c_{\tilde{F}})_* \overline{E} + d_2 (c_{\tilde{F}})_* \tilde{M}_{d+1} \equiv (d_1 - l(Q) + 1)E + d_2 M_{d+1}$$

o que encerra a demonstração do lema. \square

Teorema C. *Sejam Σ_d a d -superfície de Hirzebruch sobre k e $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Então, uma folheação genérica em Σ_d com fibrado normal $N \equiv (d_1 - d + 2)F + (d_2 + 2)M_d$ possui p -divisor não nulo e reduzido. Mais precisamente, $U(\Sigma_d, \mathcal{O}_{\Sigma_d}(F + M_d), N) \neq \emptyset$ se*

- $N \cdot F - 2 \geq 0$ e $p \nmid N \cdot F - 2$ (se não nulo)

- $\deg(N) - (1 + d)N \cdot F + d - 2 \geq 0$ e $p \nmid \deg(N) - (1 + d)N \cdot F + d - 2$ (se não nulo).

Demonstração. A prova será feita por indução em d , sendo o caso $d = 0$ já feito no Teorema 5.4.3. Suponha que o resultado seja verdadeiro para todas as superfícies de Hirzebruch de tipo j com $j \leq d$, isto é, suponha que para cada $j \in \{0, \dots, d\}$ e cada $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ com $p \nmid d_i$ (se $d_i \neq 0$) podemos encontrar uma folheação \mathcal{H} tal que

- (i) $K_{\mathcal{H}} \equiv d_1 F_0 + d_2 M_j$, onde que F_0 é uma fibra da projeção natural $\pi : \Sigma_j \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ e M_j é uma seção de π tal que $M_j^2 = j$ e $M_j \cdot F = 1$.
- (ii) Se M é a seção de auto-interseção negativa de Σ_j temos que F_0 e M são \mathcal{H} -invariantes e $\{Q\} = F_0 \cap M$ é uma singularidade de \mathcal{H} p -reduzida, onde $M^2 = -j$.
- (iii) $\Delta_{\mathcal{H}}$ é reduzido.

Vamos mostrar que o mesmo vale sobre Σ_{d+1} . Fixe $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Seja \mathcal{G} uma folheação em Σ_d satisfazendo (i), (ii) e (iii) para $j = d$.

Sejam Q a singularidade p -reduzida em $F_0 \cap M$ e $\pi_Q : Bl_Q(\Sigma_d) \rightarrow \Sigma_d$ a explosão centrada em Q . Pelo Lema 5.2.7, sabemos que $Bl_Q^* \mathcal{F}$ é uma folheação em $Bl_Q(\Sigma_d)$ com p -divisor reduzido. Mais precisamente, se \bar{E} denota o divisor excepcional e $\mathcal{G} = \pi_Q^* \mathcal{F}$, sabemos que

$$\Delta_{\mathcal{G}} = \tilde{\Delta}_{\mathcal{F}} + \bar{E}.$$

Afirmamos que como Q é p -reduzida garantimos que ao longo de \bar{E} existe pelo menos uma singularidade p -reduzida de \mathcal{G} .

De fato, em uma vizinhança de Q a folheação é dada por uma 1-forma do tipo

$$\omega = \alpha y dx + x dy + O(2)$$

e considerando a carta $\pi_Q : (x, t) \mapsto (x, xt)$ vemos que em uma vizinhança de \bar{E} a folheação \mathcal{G} é dada pela 1-forma:

$$\sigma = (\alpha + 1) t dx + x dt + O(2).$$

Em particular, Q é p -reduzida. Denote por

$$c_F : Bl_Q(\Sigma_d) \rightarrow Y$$

a contração da reta \tilde{F} que é a transformada estrita de F_0 . Como $Q \in F_0$ a reta \tilde{F} tem auto-interseção -1 de modo que existe a contração. A superfície de saída, Y , é a superfície de Hirzebruch de tipo $d + 1$ (Σ_{d+1}). Vamos mostrar que $c_{F*} \mathcal{G}$ é uma folheação em Σ_{d+1} satisfazendo (i), (ii) e (iii). Sejam \bar{E} o divisor excepcional associado a explosão Bl_Q e \tilde{M}_{d+1} a transformada estrita da curva M_d . Denote por $E = c_{F*} \bar{E}$ e $M_{d+1} = c_{F*} \tilde{M}_{d+1}$ as curvas induzidas pela contração c_F . Observe que valem as seguintes fórmulas

$$E^2 = 0 \quad , \quad E \cdot M_{d+1} = 1 \quad , \quad M_{d+1}^2 = d + 1.$$

Se $\{P\} = c_{\tilde{F}}(\tilde{F})$ temos que

$$c_{\tilde{F}} : Bl_Q(\Sigma_d) - \{\tilde{F}\} \rightarrow \Sigma_{d+1} - \{P\}$$

é um isomorfismo. Em particular, como $\Delta_{\mathcal{F}}$ é reduzido temos que $\Delta_{c_{\tilde{F}*} \mathcal{G}}$ é reduzido de modo que obtemos iii. A verificação local acima mostra que $E \cap M = \{Q_2\}$ é uma singularidade

p -reduzida de $c_{\tilde{F}*}\mathcal{G}$ e o Lema 5.5.2 garante que $K_G \equiv d_1E + d_2M_{d+1}$, de modo que obtemos (i). Isso encerra a demonstração do teorema. \square

Observação 5.5.3. *Sejam $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e F uma seção da projeção natural $\pi : \Sigma_d \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ e M_d uma seção de π tal que*

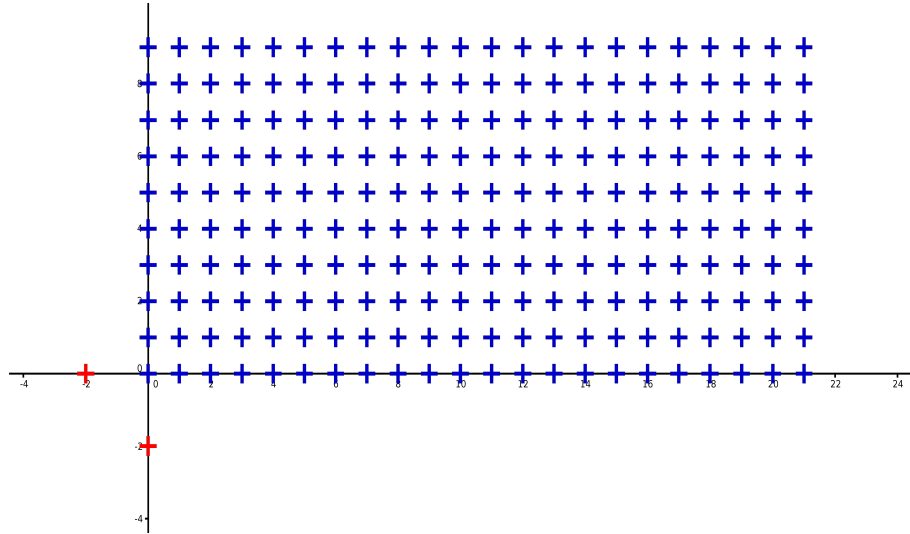
$$F \cdot M_d = 1 \quad , \quad M_d^2 = d.$$

Defina

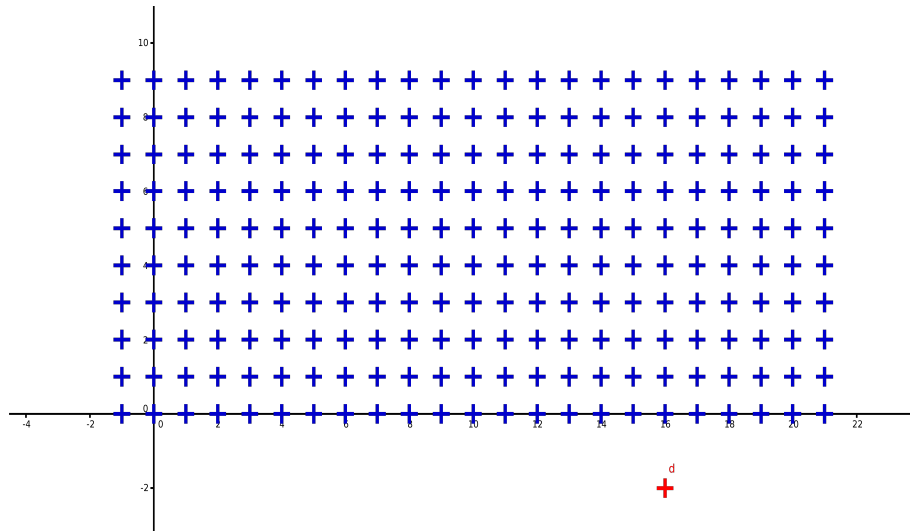
$$S_d = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \text{existe uma folheação em } \Sigma_d \text{ com fibrado canônico } K \equiv d_1F + d_2M_d\}.$$

Segue de [18, Proposition 3.6] que:

- $S_0 = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid d_1, d_2 \geq 0\} \cup \{(-2, 0)\} \cup \{(0, -2)\}$,



- Se $d > 0$: $S_d = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid d_1 \geq -1, d_2 \geq 0\} \cup \{(d, -2)\}$.



Agora, defina:

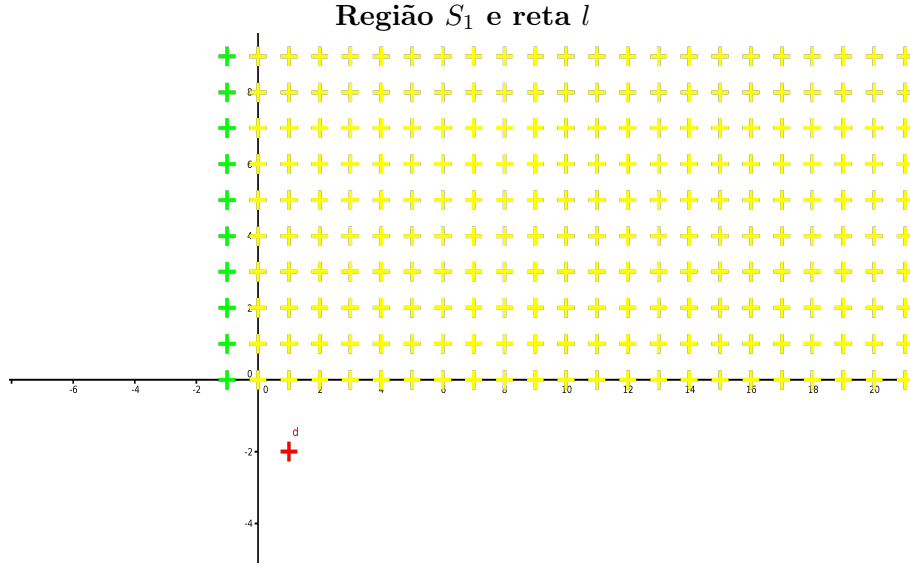
$$R_d = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \text{existe uma folheação em } \Sigma_d \text{ com } p\text{-divisor reduzido e } K \equiv d_1 F + d_2 M_d\}.$$

O Teorema C pode ser reformulado do seguinte modo:

- $R_0 = S_0 - S_0(p) \cup \{(-2, 0)\} \cup \{(0, -2)\}$,
- Se $d > 0$: $R_d = S_d - S_d(p) \cup \{(-1, d) \mid d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{(d, -2)\}$

$$\text{onde } S_d(p) = \{(d_1, d_2) \in S_d \mid p \mid d_1 \text{ ou } p \mid d_2\} - \{(0, 0)\}.$$

A próxima proposição mostra que cada ponto P na reta $l = \{(-1, e) \mid e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ na região S_1 admite um exemplo de folheação com p -divisor admitindo uma p -potência.



Proposição 5.5.4. *Seja \mathcal{F} uma folheação não p -fechada de grau d em \mathbb{P}_k^2 e $Q \in \mathbb{P}_k^2 - \text{sing}(\mathcal{F}) \cup \mathcal{Z}(\Delta_{\mathcal{F}})$. Seja $\mathcal{G} = \text{Bl}_Q^* \mathcal{F}$ a folheação induzida em $\text{Bl}_Q(\mathbb{P}_k^2)$. Então, \mathcal{G} não é p -fechada e $\Delta_{\mathcal{G}}$ contém uma p -potência. Além disso, $K_{\mathcal{G}} \equiv -F + dM_1$.*

Demonstração. A condição $Q \notin \text{sing}(\mathcal{F})$ implica que $l(Q) = 0$ de modo que temos

$$N_{\mathcal{G}} = \text{Bl}_Q^* N_{\mathcal{F}} \quad \text{e} \quad K_{\mathcal{G}} = \text{Bl}_Q^* K_{\mathcal{F}} + (1 - l(Q))E = \text{Bl}_Q^* K_{\mathcal{F}} + E.$$

Daí,

$$[\Delta_{\mathcal{G}}] = pK_{\mathcal{G}} + N_{\mathcal{G}} = \text{Bl}_Q^* \Delta_{\mathcal{F}} + pE = \tilde{\Delta}_{\mathcal{F}} + pE$$

onde a última igualdade segue da condição $Q \notin \mathcal{Z}(\Delta_{\mathcal{F}})$. Em particular, $\text{ord}_E(\Delta_{\mathcal{G}}) = p$. Agora, temos

$$K_{\mathcal{G}} = \text{Bl}_Q^* K_{\mathcal{F}} + E \equiv (d-1)(E+F) + E \equiv (d-1)F + dE$$

Escreva $M_1 \equiv aF + bE$. Como $1 = M_1 \cdot F = b$ temos $M_1 \equiv aF + E$. Como $1 = M_1^2 = (aF + E)^2 = 2a - 1$ obtemos $a = 1$. Daí, $M_1 = F + E$ o que implica $E = M_1 - F$. Assim,

$$K_{\mathcal{G}} \equiv (d-1)F + dE \equiv (d-1)F + d(M_1 - F) \equiv -F + dM_1$$

o que encerra a prova da proposição. □

5.6 Alguns problemas

Nesta seção, coletamos alguns problemas relacionados aos resultados precedentes.

Problema 2. *É possível refinar o resultado? Por exemplo, é verdade que uma folheação genérica de grau $d \geq 2$ em \mathbb{P}_k^2 tem p -divisor irreduzível?*

Problema 3. *Seja \mathcal{F} uma folheação em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ definida por uma 1-forma projetiva $\Omega = A dx + B dy + C dz$ e suponha que $A, B, C \in \mathbb{Z}[x, y, z]_{d+1}$. Seja $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ um inteiro primo e suponha que p não divide $d + 2$. Seja \mathcal{F}_p a folheação obtida por redução modulo p de Ω . Existe alguma relação entre folheações em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tal que $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irreduzível para infinidade de primos p e folheações em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ sem soluções algébricas?*

O Problema 2 é verdadeiro para características baixas e graus baixos. Baixo aqui, significa que a computabilidade do p -divisor é possível no computador. Os resultados precedentes e os exemplos abaixo sugerem que a resposta para o problema 3 é sim.

Exemplo 5.6.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação não dicrítica em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ definida por uma 1-forma projetiva $\Omega = A dx + B dy + C dz$. Seja K um corpo de número e suponha que $A, B, C \in \mathcal{O}_K[x, y, z]_{d+1}$, onde \mathcal{O}_K é o anel de inteiros de K . Seja $\mathfrak{m} \in \mathbf{Spm}(\mathcal{O}_K)$ de característica p e suponha que p não divide $d + 2$. Seja \mathcal{F}_p a folheação em $\mathbb{P}_{k(\mathfrak{m})}^2$ obtida por redução modulo \mathfrak{m} de Ω . Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irreduzível então \mathcal{F} não admite soluções algébricas. Isso pode ser usado para dar uma simples prova de que as folheações de Jouanolou de grau 2 e 3 não admitem soluções algébricas.*

Demonstração. Suponha por contradição que \mathcal{F} admite uma solução algébrica C . Usando automorfismos de Galois, podemos supor que C está definida por um polinômio irreduzível sobre \mathcal{O}_K . Em particular, C é reduzida como uma curva em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Seja $F \in \mathcal{O}_K[x, y, z]$ o polinômio irreduzível definindo C . Pelo [7, theorem] sabemos que $\deg(F) \leq d + 2$. Seja $F \otimes k(\mathfrak{m})$ o polinômio obtido por redução módulo \mathfrak{m} de F . Note que redução módulo \mathfrak{m} preserva invariância no sentido que a curva descrita por $F \otimes k(\mathfrak{m})$ é invariante pela folheação \mathcal{F}_p . Seja $G \in k(\mathfrak{m})[x, y, z]$ um fator irreduzível não constante de F . Temos que a curva $\{G = 0\} \subset \mathbb{P}_{k(\mathfrak{m})}^2$ é \mathcal{F}_p -invariante e pela Proposição 3.3.11 concluímos que $G | \Delta_{\mathcal{F}_p}$. Como $\Delta_{\mathcal{F}}$ é irreduzível segue que $\{G = 0\} = \Delta_{\mathcal{F}}$ o que é um absurdo por comparação de graus já que $p(d - 1) + d + 2 = \deg(\Delta_{\mathcal{F}_p}) > d + 2 \geq \deg(G)$. \square

Seja \mathcal{F} uma folheação em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ e Q uma singularidade reduzida de \mathcal{F} . Suponha que Q seja não degenerada. Nesse caso, sabemos que se α é o valor característico de Q então $\alpha \notin \mathbb{Q}_+$. Então, por [35, Appendice II] sabemos que existe um sistema de coordenadas holomorfo tal que a folheação é dada pela 1-forma

$$\omega = -\alpha y(1 + b(x, y))dx + x(1 + a(x, y))dy$$

com $a, b \in \langle x, y \rangle$. Em particular, se C é uma curva algébrica reduzida \mathcal{F} -invariante com $Q \in C$ então no sistema de coordenadas acima temos que C é dada por $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ ou $\{xy = 0\}$. Daí, computando o índice de Camacho-Sad resulta que

$$CS(\mathcal{F}, C, Q) = \begin{cases} 1/\alpha & \text{se } C = \{x = 0\}. \\ \alpha & \text{se } C = \{y = 0\}. \\ \alpha + \alpha^{-1} + 2 & \text{se } C = \{xy = 0\}. \end{cases}$$

Em particular, temos que a norma do índice é limitada por uma constante que depende apenas do valor característico de Q . Mais precisamente, temos que $|CS(\mathcal{F}, C, Q)| \leq |\alpha| + |\alpha|^{-1} + 2$. Usaremos isso no exemplo abaixo.

Exemplo 5.6.2. *Seja \mathcal{F} uma folheação em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ não degenerada definida e primitiva¹ sobre \mathbb{Z} . Suponha que \mathcal{F} seja reduzida e defina*

$$\alpha_{\mathcal{F}} := \sup\{|\alpha(Q)| \mid Q \in \text{sing}(\mathcal{F})\} \quad e \quad \bar{\alpha}_{\mathcal{F}} := \sup\{|\alpha(Q)|^{-1} \mid Q \in \text{sing}(\mathcal{F})\}.$$

Sejam $\beta_{\mathcal{F}} = \alpha_{\mathcal{F}} + \bar{\alpha}_{\mathcal{F}} + 2$ e p um número primo tal que

- $p > (d_{\mathcal{F}} + 1)\beta_{\mathcal{F}}^{1/2}$.
- $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é um divisor primo.

Então, \mathcal{F} não admite soluções algébricas.

Demonstração. Suponha por contradição que \mathcal{F} admite uma solução algébrica C . Usando automorfismos de Galois, podemos assumir que C está definida por um polinômio irreduzível sobre \mathbb{Z} . Como \mathcal{F} é não degenerada e reduzida, usando a fórmula de Camacho-Sad (ver [4, Theorem 3.2]) temos que

$$d_C^2 = C^2 \leq \sum_{Q \in \text{sing}(\mathcal{F}) \cap C} |CS(\mathcal{F}, C; Q)| \leq \#\text{sing}(\mathcal{F})\beta_{\mathcal{F}} = (d_{\mathcal{F}}^2 + d_{\mathcal{F}} + 1)\beta_{\mathcal{F}} \leq (d_{\mathcal{F}} + 1)^2\beta_{\mathcal{F}}$$

Da fórmula acima resulta que $d_C \leq (d_{\mathcal{F}} + 1)\beta_{\mathcal{F}}^{1/2} < p$. Assim, reduzindo C módulo p garantimos que a redução $C \otimes \mathbb{F}_p$ não possui p -fator². Agora, seja E um fator irreduzível de $C \otimes \mathbb{F}_p$. Temos que E é uma curva \mathcal{F}_p -invariante irreduzível e daí pela irreduzibilidade de $\Delta_{\mathcal{F}}$ segue que $\Delta_{\mathcal{F}_p} = E$, o que é uma contradição por comparação de graus. \square

¹isto é, a folheação está dada por uma 1-forma homogênea $\omega = Adx + Bdy + Cdz$ com $A, B, C \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ e o máximo divisor comum dos coeficientes de A, B, C é 1

²isto é, não existe um divisor D tal que $pD \leq C \otimes \mathbb{F}_p$

Capítulo 6

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$ via característica positiva

Resumo. Neste capítulo exibimos novas componentes irredutíveis do espaço de folheações holomorfas de codimensão um e grau $d \geq 3$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ usando a técnica de redução módulo p .

6.1 Introdução

Sejam k um corpo algebricamente fechado e X uma variedade projetiva não singular de dimensão maior que dois definida sobre k . Seja \mathcal{L} um feixe invertível amplo em X . Uma folheação de codimensão um em X com fibrado normal \mathcal{L} é determinada por uma seção global não nula $\sigma \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L})$ que possui zeros de codimensão pelo menos dois e satisfazendo a condição de integrabilidade:

$$\sigma \wedge d\sigma = 0.$$

Como para qualquer $\alpha \in k^*$ temos que $\alpha \cdot \sigma$ e σ definem a mesma folheação, o espaço das folheações de codimensão um com fibrado normal \mathcal{L} admite naturalmente uma estrutura de subvariedade quase projetiva de $\mathbb{P}(H^0(X, \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}))$ dada pela condição fechada de integrabilidade e a condição aberta no conjunto singular. Denote tal espaço por $\mathbb{F}ol_{\mathcal{L}}(X)$. Surge naturalmente o seguinte problema:

Problema 4. *Descrever as componentes irredutíveis de $\mathbb{F}ol_{\mathcal{L}}(X)$.*

O problema nessa generalidade é muito difícil. De fato, mesmo quando $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ esse problema ainda é fonte de muitos trabalhos e não é completamente entendido, mesmo em grau $d = 3$ (veja [14]).

Relembre que o espaço das folheações de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n$ consiste no seguinte conjunto

$$\mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n) = \left\{ [\omega] \in \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n, \Omega_{\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n}^1(d+2))) \mid \omega \wedge d\omega = 0 \text{ e } \text{codim sing}(\omega) \geq 2 \right\}.$$

Explicitamente, um elemento $\omega \in H^0(\mathbb{P}_k^n, \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(d+2))$ pode ser escrito como

$$\omega = A_0 dx_0 + A_1 dx_1 + \cdots + A_n dx_n$$

onde A_0, \dots, A_n são polinômios homogêneos de grau $d+1$ e tal que $\sum_{i=0}^n A_i x_i = 0$. A condição de integrabilidade se traduz em uma série de equações:

$$A_i \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_l} \right) + A_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_i} \right) + A_l \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) = 0$$

para $0 \leq i < j < l \leq n$.

Para comodidade do leitor apresentamos alguns resultados conhecidos sobre componentes folheações de codimensão um e grau $d \geq 0$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$.

- **Grau 0 e grau 1:** Inicialmente considerado em [27] Jouanolou demonstra que $\text{Fol}_0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$ é irredutível e se identifica com a grassmanniana de retas em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. Jouanolou ainda demonstra que $\text{Fol}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$ admite precisamente duas componentes irredutíveis.
- **Grau 2:** Para folheações de codimensão um e grau $d = 2$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ Cerveau e Lins Neto mostraram em [8] que $\text{Fol}_2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$ admite precisamente seis componentes irredutíveis e descrevem explicitamente tais componentes.
- **Grau 3:** Recentemente em [14], R.C. da Costa, R. Lizarbe e J.V Pereira, usando um teorema de estrutura para folheações de codimensão um e grau $d = 3$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, descrevem precisamente 18 componentes irredutíveis de $\text{Fol}_3(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$ cujo elemento genérico não admite integral primeira meromorfa. Além disso, os autores mostram ainda que $\text{Fol}_3(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$ possui pelo menos 24 componentes irredutíveis distintas.
- **Componentes clássicas em grau $d \geq 3$:**
 - (i) **Componentes racionais:** Sejam F, G polinômios irredutíveis homogêneos de graus p e q respectivamente. Suponha que F e G sejam coprimos e que $d = p+q-2$. Nesse caso diremos que o par (F, G) é genérico. Então, $\omega = qFdG - pGdF$ define uma folheação em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ de grau d . Denote por (p, q) o conjunto de folheações desse tipo. Então, o fecho $\overline{(p, q)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$ (veja Gómez-Mont e Lins Neto [21]).
 - (ii) **Componentes logarítmicas:** São generalizações naturais das componentes racionais. Sejam $d_1, d_2, \dots, d_r \in \mathbb{Z}_{>0}$ e F_1, \dots, F_r polinômios homogêneos com $d_i = \deg(F_i)$. Suponha que F_1, \dots, F_r são irredutíveis e primos entre si. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}^*$ tais que $\sum_{i=1}^r \alpha_i d_i = 0$ e considere a 1-forma

$$\Omega = F_1 F_2 \cdots F_{r-1} F_r \sum_{i=1}^r \alpha_i \frac{dF_i}{F_i}.$$

A 1-forma Ω define uma folheação \mathcal{F}_{Ω} de codimensão um e grau $d = \sum_i d_i - 2$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. Nesse caso dizemos que \mathcal{F}_{Ω} é uma folheação logarítmica de tipo (d_1, \dots, d_r) . Denote por $\text{Log}_n(d_1, \dots, d_r)$ o conjunto de folheações logarítmicas em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ de tipo (d_1, \dots, d_r) . Então o fecho $\overline{\text{Log}_n(d_1, \dots, d_r)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$ (veja Calvo-Andrade [6] e F. Cukierman, J. Gargiulo e C. D. Massri [12]).

- (iii) **Componentes do tipo pullback:** Seja \mathcal{G} uma folheação de codimensão um em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ e grau e . Suponha que \mathcal{G} está definida por uma 1-forma projetiva ω e seja $F : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ um mapa racional dominante de grau m . Então, $F^*\omega$ define um folheação de grau $d = ((e+2)m-2)$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. Denote por $\text{PB}(m, e, n)$ o conjunto de folheações desse tipo. Então, o fecho $\overline{\text{PB}(m, e, n)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_{(e+2)m-2}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$ (veja Cerveau, Lins Neto e Edixhoven [9].)

No presente capítulo vamos determinar novas componentes irredutíveis de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$ cujo argumento se passa a redução módulo p .

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$. Considere o conjunto de mapas racionais $\phi : \mathbb{P}_k^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ que associa

$$[x_0 : x_1 : y_0 : y_1] \mapsto ([L_0 : L_1], [Q_0, Q_1])$$

com L_0, L_1, Q_0 e Q_1 polinômios homogêneos de grau um. Denote o conjunto de mapas como acima por $\text{Map}_1(\mathbb{P}_k^3, \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1)$. Sejam $d \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ e $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $d = d_1 + d_2 + 2$ e suponha que a característica do corpo base k satisfaz a condição: $p > d + 2$. Denote por $\text{Fol}_{(d_1, d_2)}(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1)$ o espaço parametrizando as folheações em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com divisor canônico numericamente equivalente a $K \equiv d_1 F + d_2 M$, onde F e M são respectivamente fibras da primeira e segunda projeção de $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ em \mathbb{P}_k^1 .

Considere o mapa racional

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Map}_1(\mathbb{P}_k^3, \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1) \times \text{Fol}_{(d_1, d_2)}(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1) &\dashrightarrow \text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\mapsto \Phi^* \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Teorema D. *Seja $X_{(d; d_1, d_2)}$ o fecho de Zariski da imagem de Ψ . Então, $X_{(d; d_1, d_2)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3)$.*

Como consequência de princípios gerais relacionados a redução módulo p veremos que o teorema acima implicará o seguinte teorema.

Teorema E. *Sejam $d \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ e $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional*

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Map}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) \times \text{Fol}_{(d_1, d_2)}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) &\dashrightarrow \text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\mapsto \Phi^* \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Seja $C_{(d; d_1, d_2)}$ o fecho de Zariski da imagem de Ψ . Então, $C_{(d; d_1, d_2)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$.

O Teorema E generaliza para grau maior que três uma componente irredutível de $\text{Fol}_3(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$ encontrada em [14].

Na Seção 6.2, apresentamos um resultado sobre o comportamento do grau do p -divisor que será relevante para demonstrar o Teorema D. Na Seção 6.3 fazemos a prova do Teorema D e na Seção 6.4, após uma discussão sobre redução módulo p , estabelecemos o Teorema E.

6.2 Grau do p -divisor em vizinhanças

Nesta seção vamos mostrar o seguinte resultado auxiliar que será relevante na demonstração do Teorema D.

Teorema 6.2.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um e grau d em \mathbb{P}_k^3 e suponha que*

- \mathcal{F} é não p -fechada com p -divisor reduzido.
- A p -folheação $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ tem grau $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Então, existe um aberto $U_{\mathcal{F}}$ do espaço de folheações de codimensão um e grau d em \mathbb{P}_k^3 que contém \mathcal{F} tal que para qualquer folheação $\mathcal{F}' \in U_{\mathcal{F}}$ temos que

- (i) \mathcal{F}' é não p -fechada e $\Delta_{\mathcal{F}'}$ não admite p -fatores, isto é, para cada divisor H no suporte de $\Delta_{\mathcal{F}'}$ temos que $\text{ord}_H(\Delta_{\mathcal{F}'}) < p$. Além disso, $\text{deg}(\Delta_{\mathcal{F}'}) \geq \text{deg}(\Delta_{\mathcal{F}})$.
- (ii) A p -folheação $\mathcal{C}_{\mathcal{F}'}$ tem grau $e' \leq e$.

Observação 6.2.2. *Se a característica do corpo base k é maior do que $d+2$ então podemos construir exemplos de folheações de codimensão um e grau d em \mathbb{P}_k^3 com p -divisor reduzido. De fato, pelo Teorema 5.4.3 sabemos que dados $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ com $p \nmid d_i$ para todo i temos que uma folheação genérica em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com fibrado canônico do tipo $K \equiv d_1F + d_2M$ possui p -divisor reduzido. Desse modo, fixe (d_1, d_2) tais que $d = d_1 + d_2 + 2$ e seja \mathcal{G} uma folheação em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ com divisor canônico $K_{\mathcal{G}} \equiv d_1F + d_2M$. Então, considerando o mapa racional*

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{P}_k^3 &\dashrightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1 \\ [x_0 : x_1 : y_0 : y_1] &\mapsto ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \end{aligned}$$

obtemos a folheação $\mathcal{F} = \Phi^*\mathcal{G}$ de grau d em \mathbb{P}_k^3 com p -divisor reduzido dado por $\Delta_{\mathcal{F}} = \Phi^*\Delta_{\mathcal{G}}$.

Note que pela fórmula do grau mencionada na Observação 3.3.18 temos que

$$\text{deg}(\Delta_{\mathcal{F}}) + p d_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} = p(d-1) + d + 2$$

e assim para demonstrar o Teorema 6.2.1 é suficiente mostrar apenas o item (i).

Definição 6.2.3. *Sejam k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e $G \in k[x_0, \dots, x_n]$ não constante. A p -decomposição de G é a única, módulo k^* , escritura $G = FE^p$ onde $E \in k[x_0, \dots, x_n]$ e $F \in k[x_0, \dots, x_n]$ é livre de p -potências.*

Começamos a prova do Teorema 6.2.1 com o seguinte lema.

Lema 6.2.4. *Sejam $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ e k um corpo de característica $p > 0$. Considere $\mathbb{P}_k^{M_d}$ o espaço projetivo parametrizando todos os polinômios homogêneos de grau d em 4 variáveis: x_0, x_1, x_2, x_3 . Seja $G \in k[x_0, x_1, x_2, x_3]_d$ um polinômio homogêneo de grau d tal que $G = FE^p$ com F livre de p -potências. Então, existe um aberto em torno de G tal que para qualquer $G' \in U_G$ temos que $G' = F'E'^p$ com F' livre de p -potências com $\text{deg}(F') \geq \text{deg}(F)$.*

Demonstração. Seja $t \in \mathbb{N}$ e defina o mapa

$$\begin{aligned} \psi_t: \mathbb{P}^{M_{d-pt}} \times \mathbb{P}^{M_t} &\longrightarrow \mathbb{P}^{M_d} \\ (F, E) &\mapsto FE^p. \end{aligned}$$

Observe que ψ_t é um mapa regular entre variedades próprias. Em particular, é um morfismo fechado. Seja $S_t := \psi_t(\mathbb{P}^{M_{d-pt}} \times \mathbb{P}^{M_t})$ e defina $A_i := \bigcup_{i \leq t \leq d/p} S_t$. Observe que dado $G \in$

$k[x_0, x_1, x_2, x_3]_d$ temos que $G \in A_i$ se e somente se G tem p -decomposição do tipo $G = FE^p$ com $\deg(E) \geq i$. Assim, existe uma filtração:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_i \supset \dots$$

Suponha que $G \in k[x_0, x_1, x_2, x_3]_d$ com $G \in A_i$ e $G \notin A_{i+1}$, isto é, G tem p -decomposição do tipo $G = FE^p$ com $\deg(E) = i$. Como A_{i+1} é fechado existe um aberto em torno de G , denotado por U_G , tal que para qualquer $G' \in U_G$ a p -decomposição é do tipo $G' = F'E'^p$ com $\deg(E') \leq i = \deg(E)$. Assim, $\deg(F') \geq \deg(F)$ para todo $G' \in U_G$. \square

No que se segue, dados inteiros $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$ diremos que uma folheação \mathcal{G} em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ é **de tipo** (d_1, d_2) se o divisor canônico $K_{\mathcal{G}}$ é numericamente equivalente ao divisor $d_1F + d_2M$ onde F e M são, respectivamente, fibras da primeira e segunda projeção de $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ em \mathbb{P}_k^1 .

Lema 6.2.5. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}_k^3 definida pela uma 1-forma:*

$$\Omega = Adx_0 + Bdx_1 + Cdy_0 + Ddy_1$$

e defina o campo homogêneo associado a \mathcal{F} pondo:

$$v_{\Omega} = C\partial_{x_0} - D\partial_{x_1} - A\partial_{y_0} + B\partial_{y_1}.$$

Seja $\Phi : \mathbb{P}_k^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ o mapa racional que associa $[x_0 : x_1 : y_0 : y_1] \mapsto ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1])$ e suponha que $\mathcal{F} = \Phi^*\mathcal{G}$ para alguma folheação \mathcal{G} em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ de tipo (d_1, d_2) . Então, \mathcal{F} é p -fechada se e somente se $i_{v_{\Omega}^p}\Omega = 0$. Se \mathcal{F} é não p -fechada com $\Delta_{\mathcal{F}}$ reduzida então $[i_{v_{\Omega}^p}\Omega]_0 = \Delta_{\mathcal{F}} + pR$ para algum divisor R efetivo.

Demonstração. Vamos reduzir a prova a um problema análogo sobre superfícies. Mais precisamente, seja X uma superfície afim e \mathcal{H} uma folheação não p -fechada em X . Então, para qualquer campo v tangente a \mathcal{H} temos que v^p é um campo em X que não é tangente a \mathcal{H} . Isso segue do fato que $T_{\mathcal{H}}$ é um feixe de posto um. De fato, fixe v_1 um gerador local de $T_{\mathcal{H}}$. Como \mathcal{H} não é p -fechada segue da definição que existe uma seção local $v \in T_{\mathcal{H}}$ tal que $v^p \notin T_{\mathcal{H}}$. Seja $f \in k(X)$ uma função racional tal que $v = fv_1$. Então, pela Proposição 3.2.2 temos que $v^p = f^p v_1^p + gv$ para alguma função racional $g \in k(X)$ o que implica $v_1^p \notin T_{\mathcal{H}}$. Assim, para todo $v \in T_{\mathcal{H}}$ temos que v^p não é tangente a \mathcal{H} , o que demonstra a afirmação.

Passemos agora ao problema inicial. Como $\mathcal{F} = \Phi^*\mathcal{G}$ temos que v_{Ω} determina um campo homogêneo em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ que é tangente a folheação \mathcal{G} . Como $T_{\mathcal{G}}$ tem posto um e como \mathcal{G} é não p -fechada temos pela discussão anterior que para toda seção local $v \in T_{\mathcal{G}}$ seu p -iterado, v^p não é um elemento $T_{\mathcal{G}}$. Como v_{Ω} determina uma seção local de $T_{\mathcal{G}}$ temos que $v_{\Omega}^p \notin T_{\mathcal{G}}$, o que implica $i_{v_{\Omega}^p}\Omega \neq 0$. \square

Proposição 6.2.6. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}_k^3 e suponha que \mathcal{F} não é p -fechada. Suponha ainda que $\Delta_{\mathcal{F}}$ seja um divisor reduzido. Então, existe um aberto $U_{\mathcal{F}}$ do espaço de folheações de codimensão um e grau d em \mathbb{P}_k^3 contendo \mathcal{F} tal que para todo $\mathcal{F}' \in U_{\mathcal{F}}$ temos que*

$$\deg(\Delta_{\mathcal{F}'}) \geq \deg(\Delta_{\mathcal{F}})$$

e $\Delta_{\mathcal{F}'}$ é livre de p -potências.

Demonstração. Vamos supor inicialmente que $\mathcal{F} = \Phi^*\mathcal{G}$ para alguma folheação \mathcal{G} em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ tipo (d_1, d_2) onde $\Phi: \mathbb{P}_k^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ é o mapa racional que associa $[x_0 : x_1 : y_0 : y_1] \mapsto$

$([x_0 : x_1], [y_0 : y_1])$. Seja ω uma 1-forma representando \mathcal{F} . Considere os seguintes mapas:

$$\begin{aligned}\gamma_1: \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_k^3) &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathfrak{X}_{d+1}(k^4)) \times \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_k^3) \\ &[\omega] \mapsto (v_{[\omega]}, [\omega]), \\ \gamma_2: \mathbb{P}(\mathfrak{X}_{d+1}(k^4)) \times \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_k^3) &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathfrak{X}_{pd+1}(k^4)) \times \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_k^3) \\ &([v], [\omega]) \mapsto ([v^p], [\omega]), \\ \gamma_3: \mathbb{P}(\mathfrak{X}_{pd+1}(k^4)) \times \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_k^3) &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{H}^0(\mathbb{P}_k^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^3}(pd + d + 2))) \\ &([v], [\omega]) \mapsto [i_v \omega].\end{aligned}$$

Compondo os mapas acima obtemos um mapa racional:

$$\begin{aligned}\psi: \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_k^3) &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{H}^0(\mathbb{P}_k^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^3}(pd + d + 2))) \\ &[\omega] \mapsto [i_{v_{[\omega]}^p} \omega].\end{aligned}$$

Seja U o aberto em $\mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_k^3)$ que consiste nas folheações não p -fechadas tal que $i_{v_{[\omega]}^p} \omega \neq 0$. Pelo Teorema 5.4 sabemos que existem folheações em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ de tipo (d_1, d_2) com $\Delta_{\mathcal{F}}$ reduzida. Assim, garantimos pelo Lema 6.2.5 que U é não vazio. Assim, temos que o mapa ψ se restringe a um morfismo de variedades quasi-projetivas

$$\begin{aligned}\psi_U: U &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{H}^0(\mathbb{P}_k^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^3}(pd + d + 2))) \\ &[\omega] \mapsto [i_{v_{[\omega]}^p} \omega].\end{aligned}$$

Por hipótese temos que $i_{v^p} \omega = FR^p$, onde F é livre de p -potências. Assim, pelo Lema 6.2.4 garantimos que existe um aberto $V_{\mathcal{F}}$ em torno de $i_{v^p} \omega$ tal que qualquer elemento $G \in V_{\mathcal{F}}$ tem p -decomposição do tipo $G = F'R'^p$ com F' livre de p -potências e com $\deg(F') \geq \deg(F)$. Assim, $U_{\mathcal{F}} := \psi^{-1}(V_{\mathcal{F}})$ é um aberto em torno de \mathcal{F} tal que toda folheação $\mathcal{F}' \in U_{\mathcal{F}}$ é não p -fechada e tal que $\deg(\Delta_{\mathcal{F}'}) \geq \deg(\Delta_{\mathcal{F}})$. De fato, pela Proposição 3.3.11 sabemos que $\{F' = 0\} \leq \Delta_{\mathcal{F}'}$ para toda folheação $\mathcal{F}' \in U_{\mathcal{F}}$. Daí, obtemos:

$$\deg(\Delta_{\mathcal{F}'}) \geq \deg(F') \geq \deg(F) = \deg(\Delta_{\mathcal{F}})$$

o que encerra a prova.

Argumento geral que não depende do Lema 6.2.5: Seja H um hiperplano genérico em \mathbb{P}_k^3 . Então, \mathcal{F}_H é não p -fechada e possui p -divisor na forma

$$\Delta_{\mathcal{F}_H} = \Delta_{\mathcal{F}}|_H + pR.$$

Considere agora os mapas racionais:

$$\begin{aligned}\psi_1: \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_k^3) &\longrightarrow \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_k^2) & \psi_2: \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_k^2) &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{H}^0(\mathbb{P}_k^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(p(d-1) + d + 2))) \\ \mathcal{F} &\mapsto \mathcal{F}|_H & \mathcal{G} &\mapsto \Delta_{\mathcal{G}}.\end{aligned}$$

Seja V o aberto em $\mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_k^3)$ que consiste nas folheações \mathcal{F} não p -fechadas em \mathbb{P}_k^3 tal que $\psi_1(\mathcal{F})$ é não p -fechada e tal que $\Delta_{\mathcal{F}}$ seja um divisor reduzido. Observe que ψ_1 se restringe a morfismo: $\psi_{1V}: V \longrightarrow \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_k^2)$.

Pelo Lema 6.2.4 sabemos que existe um aberto U em torno de $\Delta_{\mathcal{F}_H}$ tal que para todo

$G \in U$ tem p -decomposição do tipo $G = FE^p$ com F livre de p -fator e $\deg(F) \geq \deg(\Delta_{\mathcal{F}}|_H)$. Seja $V' = (\psi_2 \circ \psi_1|_V)^{-1}(U)$. Então, V' é um aberto em $\mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}_k^3)$ que satisfaz a propriedade desejada já que para toda folheação $\mathcal{F}' \in V'$ temos que $\Delta_{\mathcal{F}'|_H} = F'E'^p$ com F' livre de quadrados e assim $\{F' = 0\} \leq \Delta_{\mathcal{F}'}$. Daí, resulta

$$\deg(\Delta_{\mathcal{F}'}) \geq \deg(F') \geq \deg(\Delta_{\mathcal{F}}|_H) = \deg(\Delta_{\mathcal{F}})$$

o que encerra a demonstração. \square

6.2.1 Um exemplo

Nesta seção, apresentamos uma aplicação do Teorema 6.2.1 ao estudo das folheações em \mathbb{P}_k^3 que são pullbacks lineares de folheações em \mathbb{P}_k^2 . Começamos com o seguinte lema.

Lema 6.2.7. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um e grau $d > 0$ em \mathbb{P}_k^3 não p -fechada. Suponha que $p > d + 2$ e que $\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) = p(d - 1) + d + 2$. Então, existe uma folheação de grau d em \mathbb{P}_k^2 e um mapa racional $F : \mathbb{P}_k^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^2$ de grau um tal que $\mathcal{F} = F^*\mathcal{G}$.*

Demonstração. Suponha que \mathcal{F} está definida pela 1-forma homogênea $\omega = Adx_0 + Bdx_1 + Cdx_2 + Ddx_3$. Como $\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) = p(d - 1) + d + 2$ segue que a p -folheação $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ possui grau zero. Em um sistema de coordenadas conveniente temos que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ é definida por um campo $v = \partial_{x_3}$. Expandindo a fórmula $i_v\omega = 0$ resulta $D \equiv 0$. Afirmamos que a condição de integrabilidade $\omega \wedge d\omega = 0$ implica que $A, B, C \in k[x_0, x_1, x_2]_{d+1}$. De fato, expandindo a condição de integrabilidade e considerando os termos que ocorrem em $dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_3$, $dx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ e $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ obtemos as respectivas equações

$$B \frac{\partial A}{\partial x_3} = A \frac{\partial B}{\partial x_3} \quad C \frac{\partial A}{\partial x_3} = A \frac{\partial C}{\partial x_3} \quad C \frac{\partial B}{\partial x_3} = B \frac{\partial C}{\partial x_3}.$$

Note que se $\frac{\partial B}{\partial x_3} = 0$ então as equações acima implicam que $\frac{\partial A}{\partial x_3} = \frac{\partial C}{\partial x_3} = 0$ e daí teríamos que $A, B, C \in k[x_0, x_1, x_2]$ dado que $p > d + 2$. Vamos mostrar que esse é sempre o caso. Suponha, por contradição, que $\frac{\partial B}{\partial x_3} \neq 0$. Observe que podemos supor que C e B não admitem um fator em comum. De fato, pela condição $x_0A + x_1B + x_2C = 0$ e como $\text{codim sing}(\omega) \geq 2$ segue que se existir um tal fator então é da forma αx_0 para algum $\alpha \in k$. Nesse caso, podemos escrever $B = x_0\tilde{B}$ e $C = x_0\tilde{C}$ e daí teríamos $\tilde{C} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial x_3} = \tilde{B} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x_3}$ com \tilde{B} e \tilde{C} sem fatores em comum. Agora, se B e C não admitem fatores em comum então temos que $B = H \frac{\partial B}{\partial x_3}$ e $C = H \frac{\partial C}{\partial x_3}$ para algum polinômio H . Considerando a equação

$$B \frac{\partial A}{\partial x_3} = A \frac{\partial B}{\partial x_3}$$

obtemos

$$H \frac{\partial B}{\partial x_3} \frac{\partial A}{\partial x_3} = A \frac{\partial B}{\partial x_3}$$

o que implica $A = H \frac{\partial A}{\partial x_3}$, já que estamos assumindo $\frac{\partial B}{\partial x_3} \neq 0$. Mas isso é uma contradição já que $\text{codim sing}(\omega) \geq 2$. Logo,

$$\frac{\partial A}{\partial x_3} = \frac{\partial B}{\partial x_3} = \frac{\partial C}{\partial x_3} = 0$$

e como $p > d + 2$ temos que $A, B, C \in k[x_0, x_1, x_2]$. Assim, nesse sistema de coordenadas

$\mathcal{F} = F^*\mathcal{G}$ onde \mathcal{G} é a folheação em \mathbb{P}_k^2 definida pela 1-forma $\sigma = A_1dx_1 + A_2dx_2 + A_3dx_3$ e $F: \mathbb{P}_k^3 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ é o mapa racional que associa $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [x_1 : x_2 : x_3]$. \square

Observação 6.2.8. *Seja \mathcal{F} uma folheação em \mathbb{P}_k^3 que é um pullback linear de uma folheação em \mathbb{P}_k^2 . Suponha que \mathcal{F} é não p -fechada. Afirmamos que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ possui grau 0. Com efeito, seja $F: \mathbb{P}_k^3 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ o mapa racional tal que $\mathcal{F} = F^*\mathcal{G}$. Então, como $\mathcal{C}_{\mathcal{F}} = \text{Ker}(dF)$ (ver Proposição 3.3.19) temos que $\deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) = 0$.*

Proposição 6.2.9. *Seja $\text{PB}(1, d, 3)$ o fecho do conjunto que consiste nas folheações de codimensão um e grau $d > 0$ em \mathbb{P}_k^3 que são pullback lineares de folheações em \mathbb{P}_k^2 . Seja p a característica do corpo base k e suponha que $p > d + 2$. Então $\text{PB}(1, d, 3)$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3)$.*

Demonstração. Como $\text{PB}(1, d, 3)$ é irredutível é suficiente mostrar que $\text{PB}(1, d, 3)$ contém um aberto não vazio de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3)$. Pelo Lema 6.2.7 sabemos que $\mathcal{F} \in \text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3)$ é pullback linear se e somente se $\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) = p(d - 1) + d + 2$. Desse modo, seja $\mathcal{G} \in \text{PB}(1, d, 3)$ não p -fechada. Pelo Teorema 6.2.1 sabemos que existe um aberto $U_{\mathcal{G}}$ em $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3)$ tal que $\deg(\Delta_{\mathcal{G}'}) \geq \deg(\Delta_{\mathcal{G}})$ para qualquer folheação $\mathcal{G}' \in U_{\mathcal{G}}$. Pela maximalidade resulta $\deg(\Delta_{\mathcal{G}'}) = \deg(\Delta_{\mathcal{G}})$ e assim concluímos que $U_{\mathcal{G}} \subset \text{PB}(1, d, 3)$. \square

6.3 Demonstração do Teorema D

Relembramos o enunciado do teorema.

Teorema D. *Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$. Sejam $d \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$, $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional*

$$\begin{aligned} \Psi: \text{Map}_1(\mathbb{P}_k^3, \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1) \times \text{Fol}_{(d_1, d_2)}(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1) &\dashrightarrow \text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\mapsto \Phi^*\mathcal{G}. \end{aligned}$$

Suponha que $p > d + 2$ e seja $X_{(d; d_1, d_2)}$ o fecho de Zariski da imagem de Ψ . Então, $X_{(d; d_1, d_2)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3)$.

Começamos a prova do teorema acima com alguns resultados auxiliares.

Lema 6.3.1. *Seja R um domínio de tipo finito sobre k e $\mathcal{M} \in \text{Spm}(R)$. Seja $F \in R[x_0, \dots, x_n]_d$ um polinômio de homogêneo de grau d . Suponha ainda que F é bihomogêneo de tipo (d_1, d_2) e que exista $G \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ bihomogêneo de bigrau (e_1, e_2) tal que $F \equiv G \pmod{\mathcal{M}}$. Então, $(e_1, e_2) = (d_1, d_2)$.*

Demonstração. Se $F = G$ então não há o que demonstrar. Assim, podemos supor que $F \neq G$. Temos que $F - G \in \mathcal{M}[x_0, \dots, x_n]_d$, isto é, possui todos os coeficientes no ideal maximal \mathcal{M} . Suponha que todo monômio M no suporte de G não está no suporte de F . Em particular, como $F - G \in \mathcal{M}[x_0, \dots, x_n]_d$ e $\text{Supp}(F) \cap \text{Supp}(G) = \emptyset$ temos que todos os coeficientes de G estão no ideal maximal \mathcal{M} . Mas, isso é uma contradição a menos que $G \equiv 0$ já que estamos assumindo que G está definido sobre $k \subset R$. Isso demonstra que existe algum monômio M na interseção $\text{Supp}(F) \cap \text{Supp}(G)$. Em particular, segue que F e G possuem o mesmo bigrau. \square

Proposição 6.3.2. *Sejam k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e \mathcal{F} uma folheação de codimensão um e grau d em \mathbb{P}_k^3 não p -fechada. Suponha que $\mathcal{F} = \Phi^*\mathcal{G}$ para alguma folheação \mathcal{G} de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ onde Φ é o mapa racional $\Phi: \mathbb{P}_k^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ que associa $[x_0 : x_1 : y_0 : y_1]$ a $([x_0 : x_1], [y_0 : y_1])$. Seja $\{\mathcal{F}_t\}$ uma família parametrizada por alguma variedade quase projetiva T com um ponto fechado fixado $0 \in T$ tal que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. Suponha que $p > d+1$ e que exista um aberto U contendo 0 tal que \mathcal{F}_t seja tangente ao campo homogêneo*

$$v = x_0\partial_{x_0} + x_1\partial_{x_1}$$

para todo $t \in U$. Então, existe um aberto $V \subset U$ contendo 0 tal que para todo $t \in V$ temos que $\mathcal{F}_t = \Phi^*\mathcal{G}_t$ para alguma folheação \mathcal{G}_t em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ de tipo (d_1, d_2) .

Demonstração. Denote por

$$\omega_0 = G_0dx_0 + G_1dx_1 + H_0dy_0 + H_1dy_1$$

a 1-forma projetiva definindo \mathcal{F}_0 sobre k . Restringindo a um aberto afim em torno de 0 podemos supor, sem perda de generalidade, que $T = \mathbf{Spec}(R)$ para algum domínio R de tipo finito sobre k . Seja ω a 1-forma homogênea e projetiva definindo $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ e escreva $\omega = A_0dx_0 + A_1dx_1 + B_0dy_0 + B_1dy_1$ com $A_0, A_1, B_0, B_1 \in R[x_0, x_1, y_0, y_1]$ homogêneos de grau $d+1$. Vamos mostrar que a tangência de \mathcal{F}_t com o campo homogêneo v implica que A_0, A_1 são bihomogêneos de tipo (e_1, e_2) e B_0, B_1 são bihomogêneos de tipo (f_1, f_2) . Observe que isso será suficiente para provar a proposição. De fato, se \mathfrak{m} é o ideal maximal de R correspondente ao ponto $0 \in T$ então $\omega \equiv \omega_0 \pmod{\mathfrak{m}}$ e podemos aplicar o Lema 6.3.1 para concluir que A_0 e A_1 (resp. B_0 e B_1) possuem o mesmo bigrau que G_0 e G_1 (resp. H_0 e H_1).

Assim, resta mostrar que a tangência de \mathcal{F}_t com v implica que A_0, A_1, B_0 e B_1 são bihomogêneos. Note que como v é tangente a \mathcal{F}_t temos que $i_v\omega = 0$. Usando a condição de integrabilidade $\omega \wedge d\omega = 0$ e contraindo com o campo v obtemos $\omega \wedge i_vd\omega = 0$. Expandindo tal fórmula e considerando o termo de $dy_0 \wedge dy_1$ obtemos

$$B_0 \left(x_0 \frac{\partial B_1}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial B_1}{\partial x_1} \right) = B_1 \left(x_0 \frac{\partial B_0}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial B_0}{\partial x_1} \right).$$

Seja U um aberto em T tal que para qualquer $\mathcal{M} \in U$ temos que $B_0 \otimes R/\mathcal{M}$ e $B_1 \otimes R/\mathcal{M}$ tem todos os fatores distintos. Então, reduzindo a identidade acima módulo \mathcal{M} concluímos que

$$B_i \equiv x_0 \frac{\partial B_i}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial B_i}{\partial x_1} \pmod{\mathcal{M}}$$

para todo $i \in \{0, 1\}$ e $\mathcal{M} \in U$. Como $\deg(B_i) = d+1 < p$ a identidade acima mostra que B_i é bihomogêneo para todo $i \in \{0, 1\}$.

Agora observe que o campo radial se escreve como $R = v + v'$ onde v' é o campo $v' = y_0\partial_{y_0} + y_1\partial_{y_1}$. A tangência de v com \mathcal{F}_t implica, em particular, que $i_{v'}\omega = 0$. Usando a condição de integrabilidade $\omega \wedge d\omega = 0$ e contraindo com o campo v' obtemos $\omega \wedge i_{v'}d\omega = 0$.

Expandindo tal fórmula e considerando o termo de $dx_0 \wedge dx_1$ obtemos

$$A_0 \left(y_0 \frac{\partial A_1}{\partial y_0} + y_1 \frac{\partial A_1}{\partial y_1} \right) = A_1 \left(y_0 \frac{\partial A_0}{\partial y_0} + y_1 \frac{\partial A_0}{\partial y_1} \right).$$

Seja V um aberto em T tal que para qualquer $\mathcal{M} \in V$ temos que $A_0 \otimes R/\mathcal{M}$ e $A_1 \otimes R/\mathcal{M}$ pos-

suem todos os fatores distintos. Então, reduzindo a identidade acima módulo \mathcal{M} concluímos que

$$A_i \equiv y_0 \frac{\partial A_i}{\partial y_0} + y_1 \frac{\partial A_i}{\partial y_1} \pmod{\mathcal{M}}$$

para todo $i \in \{0, 1\}$ e $\mathcal{M} \in V$. Como $\deg(A_i) = d + 1 < p$ a identidade acima mostra que A_i é bihomogêneo para todo $i \in \{0, 1\}$.

Como A_0, A_1, B_0 e B_1 são bihomogêneos podemos usar o Lema 6.3.1 para concluir o resultado. Isso encerra a demonstração. \square

Passemos agora a demonstração do Teorema D.

Demonstração. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um e de grau $d \geq 3$ em \mathbb{P}_k^3 . Suponha que

- \mathcal{F} é um pullback de uma folheação não p -fechada \mathcal{G} em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ de tipo (d_1, d_2) via o mapa racional $\Phi : \mathbb{P}_k^3 \rightarrow \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ que associa $[x_0 : x_1 : y_0 : y_1]$ a $([x_0 : x_1], [y_0 : y_1])$.
- $\Delta_{\mathcal{G}}$ é um divisor reduzido.

Note que pelo Teorema 5.4 garantimos que existe uma tal folheação \mathcal{G} . Nesse caso, temos que \mathcal{F} é não p -fechada com p -divisor reduzido dado por $\Phi^* \Delta_{\mathcal{G}}$. De fato, como $\Delta_{\mathcal{G}}$ é reduzido temos que $\Phi^* \Delta_{\mathcal{G}} \leq \Delta_{\mathcal{F}}$. Por outro lado, como $\deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) = 1$ a fórmula (ver Corolário 3.3.10)

$$\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) + p \deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) = p(d - 1) + d + 2$$

implica que $\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) = p(d - 2) + d + 2$. Como $\Delta_{\mathcal{G}} \equiv pK_{\mathcal{G}} + N_{\mathcal{G}} = p(d_1 F + d_2 M) + (d_1 + 2)F + (d_2 + 2)M = (pd_1 + d_1 + 2)F + (pd_2 + d_2 + 2)M$, temos que $\Phi^* \Delta_{\mathcal{G}}$ tem grau igual a $p(d_1 + d_2) + d_1 + d_2 + 4 = p(d - 2) + d + 2 = \deg(\Delta_{\mathcal{F}})$, o que prova a afirmação.

Seja T uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_k^3)$ contendo \mathcal{F} . Vamos mostrar que o Teorema 6.2.1 implica que $T = X_{(d; d_1, d_2)}$. Observe que pela definição de $X_{(d; d_1, d_2)}$ sabemos que $X_{(d; d_1, d_2)}$ é um conjunto fechado irredutível.

Seja $\{\mathcal{F}_t\}$ a família de folheações parametrizadas por T . Observe que tal família induz uma família de folheações de dimensão um sobre \mathcal{H} , onde \mathcal{H} é a p -folheação associada a $\mathcal{F} : \{\mathcal{H}_t\}_{t \in T}$. De fato, como \mathcal{F} é não p -fechada garantimos que \mathcal{F}_t é não p -fechada para $t \in U$, onde U é algum aberto contendo \mathcal{F} . Nesse caso, \mathcal{H}_t será a p -folheação associada a \mathcal{F}_t . Usando o Teorema 6.2.1 podemos supor ainda, diminuindo U se necessário, que $\deg(\mathcal{H}_t) \leq 1$. Note que pela Observação 6.2.8 temos que \mathcal{F} não é um pullback linear já que $\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) = \deg(\Phi^* \Delta_{\mathcal{G}}) = p(d_1 + d_2) + d_1 + d_2 + 4 = p(d - 2) + d + 2 \neq p(d - 1) + d + 2$. Pela Proposição 6.2.9 sabemos que as folheações que são pullback lineares por mapas racionais para \mathbb{P}_k^2 formam um conjunto fechado. Desse modo, diminuindo ainda mais U , se necessário, podemos supor que $\deg(\mathcal{H}_t) = 1$. Observe que podemos supor também que \mathcal{F}_t não admite fator de integração, já que tal condição é uma condição fechada própria no espaço de folheações (veja [14, Lemma 3.5]). Em particular, segue que \mathcal{H}_t é p -fechada para todo $t \in U$. De fato, se \mathcal{H}_t não é p -fechada então segue da definição que existe um campo homogêneo de grau um, v_t , tal que v_t^p é um campo homogêneo de grau um tangente a \mathcal{F}_t , mas $(v_t^p)^p = v_t^{p^2}$ não é tangente a \mathcal{F}_t . Nesse caso, se \mathcal{F}_t está dada pela 1-forma homogênea ω_t então pela Proposição 3.3.3 temos que a contração de ω_t com $v_t^{p^2}$ é um fator de integração para \mathcal{F}_t , o que é uma contradição. Outra maneira de ver isso é notar que se \mathcal{H}_t não é p -fechada então existe um campo v_t homogêneo e de grau um tal que $v_t \wedge v_t^p \neq 0$. Nesse caso, considerando o produto

exterior $v_t \wedge v_t^p$ obtemos uma seção global não nula do feixe $\Lambda^2 T_{\mathbb{P}_k^3} \cong \Omega_{\mathbb{P}_k^3}^1(4)$ que determina a folheação \mathcal{F}_t . Mas, isso implicaria que \mathcal{F}_t teria grau dois o que é uma contradição já que $d \geq 3$. Logo, \mathcal{H}_t é p -fechada para todo $t \in U$.

Pelo Corolário 4.1.2 sabemos que existe um aberto U contendo \mathcal{F} tal que para todo $t \in U$ temos que \mathcal{H}_t é definida por um morfismo Φ_t . Além disso, pela Proposição 6.3.2 garantimos que $\mathcal{F}_t = \Phi_t^* \mathcal{G}_t$ onde \mathcal{G}_t é uma folheação em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ de mesmo tipo que \mathcal{G} . Assim, existe um aberto V tal que para toda folheação $\mathcal{F}' \in V$ satisfaz a propriedade:

- \mathcal{F}' é um pullback de uma folheação \mathcal{G} em $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ de tipo (d_1, d_2) .

Em particular, $V \subset X_{(d;d_1,d_2)}$. Como $X_{(d;d_1,d_2)}$ é irredutível e T é uma componente irredutível contendo V concluimos, por passagem ao fecho, que $T = X_{(d;d_1,d_2)}$ o que mostra que $X_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\text{old}(\mathbb{P}_k^3)$. \square

6.4 Redução módulo p e demonstração do Teorema E

Seja $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^M$ uma variedade projetiva dada por polinômios homogêneos F_0, \dots, F_r de $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_M]$, isto é, $X = \mathcal{Z}(I)$ onde I é o ideal de $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_M]$ gerado por F_0, \dots, F_r . Para cada inteiro $0 \leq j \leq r$ escreva $F_j = \sum_{\vec{i}} \alpha_{\vec{i},j} x_0^{i_0} \dots x_M^{i_M}$ e considere a \mathbb{Z} -álgebra obtida por adjunção de todos os coeficientes $\{\alpha_{\vec{i},j}\}_{\vec{i},j}$ que ocorrem em F_0, \dots, F_r . Como existe apenas um número finito de tais coeficientes temos que R é uma \mathbb{Z} -álgebra finitamente gerada. Para cada ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R)$ de R temos pela [45, Proposition 10.35.19] que o corpo $k(\mathfrak{p}) = R/\mathfrak{p}$ é finito, em particular, de característica $p > 0$.

Defina $\psi_{\mathfrak{p}}$ o homomorfismo de anéis $\psi_{\mathfrak{p}}: R[x_0, \dots, x_M] \longrightarrow \overline{k(\mathfrak{p})}[x_0, \dots, x_M]$ obtido pela composição dos homomorfismos

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{1,\mathfrak{p}}: R[x_0, \dots, x_M] & \longrightarrow & k(\mathfrak{p})[x_0, \dots, x_M] \\ F \mapsto F \pmod{\mathfrak{p}} & & F \mapsto F. \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \gamma_{2,\mathfrak{p}}: k(\mathfrak{p})[x_0, \dots, x_M] & \longrightarrow & \overline{k(\mathfrak{p})}[x_0, \dots, x_M] \\ F \mapsto F. & & \end{array}$$

Sejam $F_{0,\mathfrak{p}}, \dots, F_{r,\mathfrak{p}} \in \overline{k(\mathfrak{p})}[x_0, \dots, x_M]$ os polinômios obtidos por redução módulo \mathfrak{p} de F_0, \dots, F_r , isto é, para cada $0 \leq j \leq r$, temos que $F_{j,\mathfrak{p}} = \psi_{\mathfrak{p}}(F_j)$. A redução módulo \mathfrak{p} de X , denotada por $X_{\mathfrak{p}}$, é a variedade projetiva definida sobre $\overline{k(\mathfrak{p})}$ obtida por redução módulo \mathfrak{p} dos polinômios F_0, \dots, F_r , isto é, $X_{\mathfrak{p}} = \mathcal{Z}(F_{0,\mathfrak{p}}, \dots, F_{r,\mathfrak{p}})$. Observe que a redução módulo \mathfrak{p} não preserva irredutibilidade em geral. De fato, considere a curva $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ onde F é o polinômio

$$F = x^2 + xy + yz + y^2 + yz + z^2.$$

A curva X é não singular e a \mathbb{Z} -álgebra obtida por adjunção dos coeficientes que ocorrem em F é precisamente $R = \mathbb{Z}$. Tomando $\mathfrak{p} = 2\mathbb{Z} \in \mathbf{Spm}(\mathbb{Z})$ vemos que a curva $X_{\mathfrak{p}}$ não é irredutível já que se $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_2} - \mathbb{F}_2$ é tal que $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ então

$$\psi_{2\mathbb{Z}}(F) = (\alpha x + (\alpha + 1)y + z)((\alpha + 1)x + \alpha y + z) \in \overline{k(2\mathbb{Z})}[x, y, z].$$

Por outro lado, o fenômeno acima ocorre somente para um conjunto finito de ideais maximais. De fato, isso é conteúdo do seguinte teorema.

Proposição 6.4.1. *(Teorema de Bertini-Noether) Seja X uma variedade projetiva irredutível em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^M$ definida por polinômios homogêneos $F_0, \dots, F_r \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_M]$, isto é, $X =$*

$\mathcal{Z}(F_0, \dots, F_r) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^M$. Seja R a \mathbb{Z} -álgebra finitamente gerada obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em F_0, \dots, F_r . Seja $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R)$ um ideal maximal de R e considere $X_{\mathfrak{p}}$ a variedade obtida por redução módulo \mathfrak{p} dos polinômios F_0, \dots, F_r , isto é, $X_{\mathfrak{p}} = \mathcal{Z}(\psi_{\mathfrak{p}}(F_0), \dots, \psi_{\mathfrak{p}}(F_r))$ onde $\psi_{\mathfrak{p}}$ é o homomorfismo natural de $R[x_0, \dots, x_M]$ em $\overline{k(\mathfrak{p})}[x_0, \dots, x_M]$. Então, $X_{\mathfrak{p}}$ é irredutível e $\dim X = \dim X_{\mathfrak{p}}$ para quase todo ideal maximal de R , isto é, para todo ideal maximal de R fora de conjunto fechado próprio $E \subset \mathbf{Spm}(R)$.

Demonstração. Pela [17, Proposition 10.4.2] sabemos que existe $c \in R$ não nulo tal que para qualquer corpo algebricamente fechado K e homomorfismo de anéis $\phi : R \rightarrow K$ tal que $\phi(c) \neq 0$ temos que a variedade $\mathcal{Z}(\phi(F_0), \dots, \phi(F_r)) \subset \mathbb{P}_K^M$ é irredutível. Seja $V(cR)$ o fechado em $\mathbf{Spm}(R)$ que consiste na coleção de todos os ideais maximais de R que contem o elemento c . Nesse caso, para todo $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R) - V(cR)$ vale $\psi_{\mathfrak{p}}(c) \neq 0$, já que $c \notin \mathfrak{p}$. Pela [17, Proposition 10.4.2] garantimos ainda que $\dim X_{\mathfrak{p}} = \dim X$ para ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R)$ fora possivelmente de um conjunto fechado T . Definindo $E = V(cR) \cup T$ temos que para todo ideal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R) - E$ a variedade $X_{\mathfrak{p}}$ é irredutível e vale $\dim X_{\mathfrak{p}} = \dim X$, o que encerra a demonstração. \square

Corolário 6.4.2. *Sejam X uma variedade projetiva em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^M$ dada por polinômios $F_0, \dots, F_r \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_M]$ e $Y \subset X$ um fechado irredutível dado por polinômios H_0, \dots, H_k . Seja Z uma componente irredutível de X contendo Y e suponha que esteja dada por polinômios G_0, \dots, G_l . Denote por R a \mathbb{Z} -álgebra finitamente gerada obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem nos polinômios $F_0, \dots, F_r, G_0, \dots, G_l, H_0, \dots, H_k$. Suponha que exista um conjunto denso S de $\mathbf{Spm}(R)$ tal que $Y_{\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{p}}$ para todo ideal $\mathfrak{p} \in S$. Então, $Y = Z$ e assim Y é uma componente irredutível de X .*

Demonstração. Pela Proposição 6.4.1 sabemos que para uma infinidade de ideais maximais $\mathfrak{p} \in S$ vale $Y_{\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{p}}$, $\dim Y = \dim Y_{\mathfrak{p}}$ e $\dim Z = \dim Z_{\mathfrak{p}}$. Daí, resulta a igualdade $\dim Y = \dim Z$. Como Y e Z são irredutíveis com $Y \subset Z$ concluímos que $Y = Z$. Isso encerra a demonstração. \square

O Teorema E seguirá imediatamente do Corolário 6.4.2.

Teorema E. *Considere o mapa racional*

$$\Psi: \text{Map}_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) \times \text{Fol}_{(d_1, d_2)}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) \dashrightarrow \text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3) \\ (\Phi, \mathcal{G}) \mapsto \Phi^* \mathcal{G}.$$

Seja $C_{(d; d_1, d_2)}$ o fecho de Zariski da imagem de Ψ . Então, $C_{(d; d_1, d_2)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$.

Demonstração. Pelo Teorema D sabemos que o enunciado análogo sobre característica $p > d + 2$ é verdadeiro. Sejam Z uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$ contendo $C_{(d; d_1, d_2)}$ e $\{E_0, \dots, E_h\}$ a união da coleção de polinômios a coeficientes em \mathbb{C} que descrevem as variedades: $Z, C_{(d; d_1, d_2)}$ e $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$. Sejam R a \mathbb{Z} -álgebra obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em E_0, \dots, E_h e T o conjunto fechado em $\mathbf{Spm}(R)$ dado por $T = \bigcup_{e=2}^{d+2} V(eR)$, onde $V(eR)$ denota a coleção de ideais de R que contem o ideal eR . Então, pelo Teorema D sabemos que para todo ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R) - T$ temos que $C_{(d; d_1, d_2), \mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{p}}$. Pelo Corolário 6.4.2 garantimos que $C_{(d; d_1, d_2)}$ é uma componente irredutível de $\text{Fol}_d(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$, o que encerra a demonstração. \square

Corolário 6.4.3. *O espaço de folheações holomorfas de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ possui pelo menos $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ componentes irredutíveis distintas com elemento genérico não admitindo um fator de integração polinomial.*

Demonstração. A descrição do elemento genérico de $C_{(d;d_1,d_2)}$ mostra que para quaisquer pares de inteiros distintos (d_1, d_2) e (e_1, e_2) tais que $d_1 + d_2 = e_1 + e_2 = d - 2$ e $d_1 \neq e_2$ ou $d_2 \neq e_1$ vale $C_{d,e_1,e_2} \neq C_{(d;d_1,d_2)}$. Observe que devemos remover as simetrias, isto é, pares de inteiros (d_1, d_2) e (e_1, e_2) tais que $e_1 = d_2$ e $e_2 = d_1$. De fato, considerando o automorfismo de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ definido por $[x_0 : x_1 : y_0 : y_1] \mapsto [y_0 : y_1 : x_0 : x_1]$ vemos que $C_{(d;d_1,d_2)}$ e $C_{(d;e_1,e_2)}$ definem a mesma componente.

Pela [14, Proposition 3.6] sabemos que uma folheação \mathcal{F} admite um fator de integração polinomial se e somente se está em alguma componente logarítmica. Reduzindo módulo p e considerando o grau do p -divisor, vemos que a redução módulo p de um elemento genérico de $C_{(d;d_1,d_2)}$ possui p -divisor com grau dependendo linearmente de p . Assim, pelo Exemplo 3.3.17 concluímos que um elemento genérico de $C_{(d;d_1,d_2)}$ não é logarítmica e daí o resultado se segue. \square

Referências Bibliográficas

- [1] Donu Arapura. *Algebraic geometry over the complex numbers*. Universitext. Springer, New York, 2012.
- [2] Arnaud Beauville. *Complex algebraic surfaces*, volume 34 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996. Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid.
- [3] Michel Brion and Shrawan Kumar. *Frobenius splitting methods in geometry and representation theory*, volume 231 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2005.
- [4] Marco Brunella. *Birational geometry of foliations*, volume 1 of *IMPA Monographs*. Springer, 2015.
- [5] Marco Brunella and Marcel Nicolau. Sur les hypersurfaces solutions des équations de Pfaff. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 329(9):793–795, 1999.
- [6] Omegar Calvo-Andrade. Irreducible components of the space of holomorphic foliations. *Math. Ann.*, 299(4):751–767, 1994.
- [7] Manuel M. Carnicer. The Poincaré problem in the nondicritical case. *Ann. of Math. (2)*, 140(2):289–294, 1994.
- [8] D. Cerveau and A. Lins Neto. Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 3$. *Ann. of Math. (2)*, 143(3):577–612, 1996.
- [9] D. Cerveau, A. Lins Neto, and S. J. Edixhoven. Pull-back components of the space of holomorphic foliations on $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 3$. *J. Algebraic Geom.*, 10(4):695–711, 2001.
- [10] D. Cerveau, Alcides Lins-Neto, Frank Loray, Jorge Vitório Pereira, and Frédéric Touzet. Complex codimension one singular foliations and Godbillon-Vey sequences. *Mosc. Math. J.*, 7(1):21–54, 166, 2007.
- [11] Maurício Corrêa. Darboux-Jouanolou-Ghys integrability for one-dimensional foliations on toric varieties. *Bull. Sci. Math.*, 134(7):693–704, 2010.
- [12] Fernando Cukierman, Javier Gargiulo Acea, and César Massri. Stability of logarithmic differential one-forms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 371(9):6289–6308, 2019.
- [13] Fernando Cukierman and Jorge Vitório Pereira. Stability of holomorphic foliations with split tangent sheaf. *Amer. J. Math.*, 130(2):413–439, 2008.

- [14] Raphael Constant da Costa, Ruben Lizarbe, and Jorge Vitório Pereira. Codimension one foliations of degree three on projective spaces. *arXiv preprint arXiv:2102.10608*, 2021.
- [15] Airton S. de Medeiros. Singular foliations and differential p -forms. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 9(3):451–466, 2000.
- [16] Torsten Ekedahl, NI Shepherd-Barron, and RL Taylor. A conjecture on the existence of compact leaves of algebraic foliations. 1999.
- [17] Michael D. Fried and Moshe Jarden. *Field arithmetic*, volume 11 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2008. Revised by Jarden.
- [18] Carlos Galindo, Francisco Monserrat, and Jorge Olivares. Foliations with isolated singularities on Hirzebruch surfaces. *arXiv preprint arXiv:2007.10071*, 2020.
- [19] Étienne Ghys. À propos d’un théorème de J.-P. Jouanolou concernant les feuilles fermées des feuilletages holomorphes. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 49(1):175–180, 2000.
- [20] Luis Giraldo and Antonio J. Pan-Collantes. On the singular scheme of codimension one holomorphic foliations in \mathbb{P}^3 . *Internat. J. Math.*, 21(7):843–858, 2010.
- [21] Xavier Gómez-Mont and Alcides Lins Neto. Structural stability of singular holomorphic foliations having a meromorphic first integral. *Topology*, 30(3):315–334, 1991.
- [22] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 1977.
- [23] Robin Hartshorne. Stable reflexive sheaves. *Math. Ann.*, 254(2):121–176, 1980.
- [24] Robin Hartshorne. Generalized divisors on Gorenstein schemes. In *Proceedings of Conference on Algebraic Geometry and Ring Theory in honor of Michael Artin, Part III (Antwerp, 1992)*, volume 8, pages 287–339, 1994.
- [25] Michiel Hazewinkel and Clyde F. Martin. A short elementary proof of Grothendieck’s theorem on algebraic vector bundles over the projective line. *J. Pure Appl. Algebra*, 25(2):207–211, 1982.
- [26] Nathan Jacobson. *Lie algebras*. Dover Publications, Inc., New York, 1979. Republication of the 1962 original.
- [27] J. P. Jouanolou. *Équations de Pfaff algébriques*, volume 708 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.
- [28] Nicholas M Katz. Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of Turrittin. *Publications mathématiques de l’IHES*, 39:175–232, 1970.
- [29] János Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

- [30] Ernst Kunz. Characterizations of regular local rings of characteristic p . *Amer. J. Math.*, 91:772–784, 1969.
- [31] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.
- [32] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Ern e, Oxford Science Publications.
- [33] Ruben Lizarbe. On the density of foliations without algebraic solutions on weighted projective planes. *arXiv preprint arXiv:2106.12494*, 2021.
- [34] B. Malgrange. Frobenius avec singularit es. I. Codimension un. *Inst. Hautes  tudes Sci. Publ. Math.*, (46):163–173, 1976.
- [35] Jean-François Mattei and Robert Moussu. Holonomie et int egrales premieres. *Annales Scientifiques de l’ cole Normale Supérieure*, 13(4):469–523, 1980.
- [36] Michael McQuillan. Curves on surfaces of mixed characteristic. *Eur. J. Math.*, 3(3):433–470, 2017.
- [37] Yoichi Miyaoka and Thomas Peternell. *Geometry of higher-dimensional algebraic varieties*, volume 26 of *DMV Seminar*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
- [38] Alcides Lins Neto. *Componentes irredutíveis dos espaços de folheac es*. IMPA, 2007.
- [39] Jorge Vitório Pereira. Invariant hypersurfaces for positive characteristic vector fields. *J. Pure Appl. Algebra*, 171(2-3):295–301, 2002.
- [40] Jorge Vitório Pereira and Frédéric Touzet. Foliations with vanishing Chern classes. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 44(4):731–754, 2013.
- [41] Bjorn Poonen. Varieties without extra automorphisms. III. Hypersurfaces. *Finite Fields Appl.*, 11(2):230–268, 2005.
- [42] Miles Reid. Chapters on algebraic surfaces. *arXiv preprint alg-geom/9602006*, 1996.
- [43] Joseph J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1995.
- [44] Conjeerveram Srirangachari Seshadri. L’opération de Cartier. Applications. *S minaire Claude Chevalley*, 4:1–26, 1958.
- [45] The Stacks project authors. The stacks project. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2021.
- [46] Andrzej Tyc. Differential basis, p -basis, and smoothness in characteristic $p > 0$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 103(2):389–394, 1988.